Epreuve écrite

Examen de fin d'études secondaires 2014 Sections: C et D Branche: Mathématiques II	Numéro d'ordre du candidat ________________

Exercice 1 (3+4+6=13 points)

1) Démontrer que $(\forall a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}), (\forall x \in]0;+\infty[), (\forall r \in \mathbb{R})\ :\ \log_a(x^r) = r \cdot \log_a(x)$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ et préciser à chaque fois l'ensemble des solutions :

a) $3(e^x + 1) = 2e^{-x} \cdot (1 - e^x)$ | b) $\log_{\frac{1}{5}}(5 - x) + \log_5(2x - 1) \leq \frac{1}{2} \cdot \log_{\sqrt{5}}(x + 3)$

Exercice 2 (3+4=7 points)

Calculer, en justifiant, les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arctan(2x)}{\log(1 - x)}$ | b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{3x + 4}{3x - 1}\right)^{6x}$

Exercice 3 (3+4+1+2+2+5=17 points)

Soit la fonction f définie par : $f(x) = x^3 \cdot \ln(x) - x^3$

1) Déterminer le domaine de définition de la fonction f et étudier le comportement asymptotique de f.
2) Etudier le sens de variation de f, déterminer le(s) extrema(s) éventuel(s) et dresser le tableau de variation de f.
3) Déterminer l'intersection de la courbe $\mathcal{C}_f$ de f avec l'axe des abscisses.
4) Déterminer une équation de la tangente t_1 à la courbe $\mathcal{C}_f$ de f au point d'abscisse 1.
5) Tracer la courbe $\mathcal{C}_f$ de f ainsi que la tangente t_1 dans un repère orthonormé d'unité $2\ cm$.
6) Calculer l'aire A_λ de la partie du plan délimitée par la courbe $\mathcal{C}_f$ de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \lambda$ et $x = e$ avec $0 < \lambda < e$. Calculer ensuite la limite de A_λ si λ tend vers 0.

Exercice 4 (3+4=7 points)

Soit la fonction f définie par : $f(x) = 2x - 3 + \dfrac{\ln(2x)}{2^x - 4}$

1) Déterminer le domaine de définition de la fonction f et montrer que la droite Δ d'équation $y = 2x - 3$ est une asymptote oblique à la courbe $\mathcal{C}_f$ de f.
2) Etudier la position de la courbe $\mathcal{C}_f$ de f par rapport à son asymptote oblique Δ sur tout le domaine de la fonction.

Exercice 5 (6+4=10 points)

Calculer les intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2x} \cdot \sin(4x)\ dx$ | b) $\displaystyle\int \frac{5x - 3}{\sqrt{9 - x^2}}\ dx$

TOURNER S.V.P. ↪

Exercice 6 (2+4=6 points)

On donne la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par : $$f(x) = \frac{3x^3 - 6x^2 + 4x + 3}{(x-1)^2}$$

1) Déterminer $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $(\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\})$: $$f(x) = ax + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2}$$

2) Déterminer sur un intervalle I à préciser la primitive F de f qui prend la valeur 7 en $x = 0$.