Examen de fin d'études secondaires 2014

Section D Mathématiques I

Question 1

$P(z) = z^3 - 3\cdot(1-2i)z^2 - (9+11i)z + 10 - 2i$

$z_0 = bi$ $(b \in \mathbb{R})$ est une solution imaginaire pure de $P(z)=0$

$\Leftrightarrow P(bi) = 0$

$\Leftrightarrow (bi)^3 - 3(1-2i)(bi)^2 - (9+11i)(bi) + 10 - 2i = 0$

$\Leftrightarrow b^3 i^3 - 3(-b^2)(1-2i) - 9bi - 11bi^2 + 10 - 2i = 0$

$\Leftrightarrow \underline{-b^3 i} + 3b^2 \underline{-6b^2 i} \underline{-9bi} + 11b + 10 \underline{-2i} = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3b^2 + 11b + 10 = 0 & (1) \\ b^3 + 6b^2 + 9b + 2 = 0 & (2) \end{cases}$

(1) : $\Delta = 1$, $b_1 = \frac{-11+1}{6} = -\frac{5}{3}$, $b_2 = \frac{-11-1}{6} = -2$

$b = -2$ dans (2) : $-8 + 6\cdot 4 + 9\cdot(-2) + 2 = 0$

$b = -\frac{5}{3}$ dans (2) : $-\frac{125}{27} + 6\cdot\frac{25}{9} - 9\cdot\frac{5}{3} + 2 = -\frac{26}{27} \neq 0$

Donc $z_0 = -2i$ est une solution imaginaire pure de $P(z)=0$ et $P(z)$ est divisible par $z + 2i$.

Schéma de Horner :

	1	$-3+6i$	$-9-11i$	$10-2i$
$-2i$	/	$-2i$	$8+6i$	$-10+2i$
	1	$-3+4i$	$-1-5i$	0

$P(z) = (z+2i)\left[z^2 + (-3+4i)z - 1 - 5i\right]$

$P(z) = 0 \Leftrightarrow z + 2i = 0$ ou $z^2 + (-3+4i)z - 1 - 5i = 0$ $(*)$

Résolvons $(*)$: $\Delta = (-3+4i)^2 - 4(-1-5i)$

$= 9 - 24i - 16 + 4 + 20i$

$= -3 - 4i$

$\delta = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$ est une racine carrée complexe de Δ

$\Leftrightarrow \delta^2 = \Delta$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -3 & (3) \\ 2xy = -4 & (4) \\ x^2 + y^2 = 5 & (5) \end{cases}$

$(3)+(5)$: $2x^2 = 2 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = -1$ ou $x = 1$

$(5)-(3)$: $2y^2 = 8 \Leftrightarrow y^2 = 4 \Leftrightarrow y = -2$ ou $y = 2$

de (4) : x et y de signes contraires

Ainsi $\delta_1 = 1 - 2i$, $\delta_2 = -1 + 2i$

Solutions de $(*)$: $z_1 = \dfrac{3-4i+1-2i}{2} = \dfrac{4-6i}{2} = 2-3i$

$z_2 = \dfrac{3-4i-1+2i}{2} = \dfrac{2-2i}{2} = 1-i$

Finalement $S = \{-2i ; 2-3i ; 1-i\}$

__Question 2__

1.) $z_1 = \dfrac{\sqrt{3}\,i}{i(1-\sqrt{3}\,i)} - \dfrac{3\sqrt{3}\,i+3}{4i}$

$= \dfrac{\sqrt{3}(1+\sqrt{3}\,i)}{(1-\sqrt{3}\,i)(1+\sqrt{3}\,i)} - \dfrac{(3\sqrt{3}\,i+3)\cdot i}{4i^2}$

$= \dfrac{\sqrt{3}+3i}{1+3} + \dfrac{-3\sqrt{3}+3i}{4}$

$= \dfrac{-2\sqrt{3}+6i}{4}$

$= -\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3}{2}i$

$|z_1| = \sqrt{\dfrac{3}{4}+\dfrac{9}{4}} = \sqrt{\dfrac{12}{4}} = \sqrt{3}$

$\begin{cases} \cos\varphi_1 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}} = -\dfrac{1}{2} \\ \sin\varphi_1 = \dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

$\varphi_1 = \dfrac{2\pi}{3}\ (2\pi)$

$z_1 = \sqrt{3}\cdot \operatorname{cis}\dfrac{2\pi}{3}$

$z_2 = \dfrac{-3\sqrt{2}}{1-i}\cdot\dfrac{1+i}{1+i}$

$= \dfrac{-3\sqrt{2}-3\sqrt{2}\,i}{1+1}$

$= -\dfrac{3\sqrt{2}}{2} - \dfrac{3\sqrt{2}}{2}i$

$|z_2| = \sqrt{\dfrac{9\cdot 2}{4}\cdot 2} = \sqrt{9} = 3$

$\begin{cases} \cos\varphi_2 = -\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{1}{3} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\varphi_2 = -\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{1}{3} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

$\varphi_2 = -\dfrac{3\pi}{4}\ (2\pi)$

$z_2 = 3\cdot\operatorname{cis}\left(-\dfrac{3\pi}{4}\right)$

2.) $Z = \dfrac{z_1^2}{z_2} = \dfrac{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i\right)^2}{\frac{-3\sqrt{2}(1+i)}{2}}$

$= \dfrac{\frac{3}{4} - \frac{6\sqrt{3}}{4}i - \frac{9}{4}}{\frac{-3\sqrt{2}(1+i)}{2}}$

$= \dfrac{\frac{-6-6\sqrt{3}\,i}{4}}{\frac{-3\sqrt{2}(1+i)}{2}}$

$= \dfrac{-6(1+\sqrt{3}\,i)\cdot 2}{-4\cdot 3\sqrt{2}(1+i)}$

$$Z = \frac{(1+\sqrt{3}i)}{\sqrt{2}(1+i)} \cdot \frac{\sqrt{2}(1-i)}{\sqrt{2}(1-i)}$$
$$= \frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3}i - i + \sqrt{3})}{2 \cdot 2}$$
$$= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}+(\sqrt{6}-\sqrt{2})i}{4}$$
$$= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} i$$

$$Z = \frac{z_1^2}{z_2} = \frac{\left(\sqrt{3} \cdot \text{cis} \frac{2\pi}{3}\right)^2}{3 \cdot \text{cis}\left(-\frac{3\pi}{4}\right)}$$
$$= \frac{3 \cdot \text{cis} \frac{4\pi}{3}}{3 \cdot \text{cis}\left(-\frac{3\pi}{4}\right)}$$
$$= \text{cis}\left(\frac{4\pi}{3} + \frac{3\pi}{4}\right)$$
$$= \text{cis}\left(\frac{16+9}{12}\pi\right)$$
$$= \text{cis}\,\frac{25\pi}{12}$$
$$= \text{cis}\,\frac{\pi}{12}$$

3.) de 2):
$$\cos\frac{\pi}{12} + i \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} i$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \\ \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

$$\tan\frac{\pi}{12} = \frac{\sin\frac{\pi}{12}}{\cos\frac{\pi}{12}} = \frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2}) \cdot 4}{4 \cdot (\sqrt{6}+\sqrt{2})} \cdot \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$$
$$= \frac{6-2\sqrt{12}+2}{6-2}$$
$$= \frac{8-4\sqrt{3}}{4}$$
$$= 2-\sqrt{3}$$

<u>Question 3</u>

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2m \\ m & 2m & 1 \\ -m & m & 2 \end{vmatrix} = 4m - 3m + 2m^3 + 4m^3 - m - 6m$$
$$= -6m + 6m^3$$
$$= 6m(m^2-1)$$

(S) est un système de Cramer $\Leftrightarrow \det A \neq 0$
$$\Leftrightarrow 6m(m^2-1) \neq 0$$
$$\Leftrightarrow m \neq 0,\ m \neq -1 \text{ et } m \neq 1$$

<u>1er cas</u> : $m \in \mathbb{R}^* - \{-1; 1\}$

$$\det A_x = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 2m \\ m & 2m & 1 \\ 0 & m & 2 \end{vmatrix} = 2m^3 - 6m = 2m(m^2-3)$$

$$\det A_y = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2m \\ m & m & 1 \\ -m & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2m + 2m^3 = 2m(1+m^2)$$

$$\det A_z = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ m & 2m & m \\ -m & m & 0 \end{vmatrix} = -3m^2 - m^2 = -4m^2$$

$$x = \frac{\det A_x}{\det A} = \frac{2m(m^2-3)}{6m(m^2-1)} = \frac{m^2-3}{3(m^2-1)}$$

$$y = \frac{\det A_y}{\det A} = \frac{2m(1+m^2)}{6m(m^2-1)} = \frac{1+m^2}{3(m^2-1)}$$

$$z = \frac{\det A_z}{\det A} = \frac{-4m^2}{6m(m^2-1)} = \frac{-2m}{3(m^2-1)}$$

$$S = \left\{ \left(\frac{m^2-3}{3(m^2-1)} ; \frac{1+m^2}{3(m^2-1)} ; \frac{-2m}{3(m^2-1)} \right) \right\}$$

Les 3 équations du système sont celles de 3 plans sécants en un point.

<u>2e cas</u>: $m = 0$

$$\begin{cases} x + 3y = 0 \\ z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3y \\ z = 0 \end{cases}$$

Posant $y = \alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R})$:

$$\begin{cases} x = -3\alpha \\ y = \alpha \\ z = 0 \end{cases}$$

$$S_0 = \{ (-3\alpha ; \alpha ; 0) \mid \alpha \in \mathbb{R} \}$$

Les 3 équations du système sont celles de 3 plans sécants en une droite passant par le point $A(0,0,0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

<u>3e cas</u>: $m = 1$:

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = 0 \\ x + 2y + z = 1 & (E_2) \mid (E_2) - (E_1) \\ -x + y + 2z = 0 & (E_3) \mid (E_3) + (E_1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+3y+2z=0 \\ -y-z=1 \\ 4y+4z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3y+2z=0 \\ \left.\begin{array}{l} y+z=-1 \\ y+z=0 \end{array}\right\} \text{impossible} \end{cases}$$

$S_1 = \emptyset$ Les 3 équations sont celles de 3 plans n'ayant aucun point commun.

<u>4^e cas:</u> $m=-1$
$$\begin{cases} x+3y-2z=0 \\ -x-2y+z=-1 & (E_2) \mid (E_2)+(E_1) \\ x-y+2z=0 & (E_3) \mid (E_3)-(E_1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+3y-2z=0 \\ y-z=-1 \\ -4y+4z=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+3y-2z=0 \\ \left.\begin{array}{l} y-z=-1 \\ y-z=0 \end{array}\right\} \text{impossible} \end{cases}$$

$S_{-1} = \emptyset$ Les 3 équations sont celles de 3 plans n'ayant aucun point commun.

<u>Question 4</u>

1.) $A(0;-1;2)$ $\quad$ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\6\\0\end{pmatrix}$ sont des vecteurs

$B(1;0;1)$

$C(2;5;2)$ $\quad$ directeurs non colinéaires du plan π.

$$M(x;y;z)\in\pi \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = k\cdot\overrightarrow{AB} + h\cdot\overrightarrow{AC} \quad (k,h\in\mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = k+2h \\ y+1 = k+6h \\ z-2 = -k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = k+2h \\ y = -1+k+6h \\ z = 2-k \end{cases}$$ système d'équations paramétriques de π

$M(x;y;z) \in \pi \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ y+1 & 1 & 6 \\ z-2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow 6(z-2) - 2(y+1) - 2(z-2) + 6x = 0$$

$$\Leftrightarrow 6z - 12 - 2y - 2 - 2z + 4 + 6x = 0$$

$$\Leftrightarrow 6x - 2y + 4z - 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x - y + 2z - 5 = 0$$ équation cartésienne de π

2.) Comme $d \perp \pi$, le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan π et aussi un vecteur directeur de la droite d.

Ainsi $M(x;y;z) \in d \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = k \cdot \vec{u} \qquad (k \in \mathbb{R})$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3k \\ y+1 = -k \\ z-2 = 2k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3k \\ y = -1 - k \\ z = 2 + 2k \end{cases}$$ système d'équations paramétriques de d

3.) Une équation cartésienne du plan π' est $3x - y + 2z + d = 0$.

$D(2;9;-3) \in \pi' \Leftrightarrow 6 - 9 - 6 + d = 0 \Leftrightarrow d = 9$

Donc $\pi' \equiv 3x - y + 2z + 9 = 0$.

4.) $\pi' \cap d$: $\begin{cases} 3x - y + 2z + 9 = 0 \\ x = 3k \\ y = -1 - k \\ z = 2 + 2k \end{cases}$ $\begin{cases} 9k + 1 + k + 4 + 4k + 9 = 0 \Leftrightarrow 14k + 14 = 0 \\ \qquad \Leftrightarrow k = -1 \\ x = -3 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

$\pi' \cap d = \{ I(-3;0;0) \}$