Corrigé (examen septembre 2014)

I 1) $P(z) = 4z^3 + \alpha z^2 + \beta z - 9 + \frac{9}{2}i$

a) $P\left(\frac{3}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow 4\cdot\frac{27}{8} + \alpha\cdot\frac{9}{4} + \beta\cdot\frac{3}{2} - 9 + \frac{9}{2}i = 0 \quad |\cdot 4$

$\Leftrightarrow 54 + 9\alpha + 6\beta - 36 + 18i = 0$

$\Leftrightarrow 9\alpha + 6\beta = -18 - 18i \quad |:3$

$\Leftrightarrow 3\alpha + 2\beta = -6 - 6i \quad (1)$

$P(i) = 5 + \frac{15}{2}i \Leftrightarrow -4i - \alpha + \beta i - 9 + \frac{9}{2}i = 5 + \frac{15}{2}i \quad |\cdot 2$

$\Leftrightarrow -8i - 2\alpha + 2\beta i - 18 + 9i = 10 + 15i$

$\Leftrightarrow -2\alpha + 2\beta i = 28 + 14i \quad |:2$

$\Leftrightarrow -\alpha + \beta i = 14 + 7i$

$\Leftrightarrow \alpha = \beta i - 14 - 7i \quad (2)$

$(2)\to(1)$: $3\beta i - 42 - 21i + 2\beta = -6 - 6i \Leftrightarrow \beta(2+3i) = 36 + 15i$

$\Leftrightarrow \beta = \frac{36+15i}{2+3i}\cdot\frac{2-3i}{2-3i} = \frac{72 - 108i + 30i + 45}{4+9} = \frac{117 - 78i}{13}$

$\Leftrightarrow \underline{\beta = 9 - 6i}$

$\to (2)$: $\alpha = 9i + 6 - 14 - 7i \Leftrightarrow \underline{\alpha = -8 + 2i}$

b) (E): $4z^3 + (2i-8)z^2 + (9-6i)z - 9 + \frac{9}{2}i = 0$

$\frac{3}{2} \in S$ d'où $P(z)$ div. par $z - \frac{3}{2}$:

	4	$2i-8$	$9-6i$	$-9+\frac{9}{2}i$
$\frac{3}{2}$		6	$3i-3$	$9-\frac{9}{2}i$
	4	$2i-2$	$6-3i$	0

$(E) \Leftrightarrow z = \frac{3}{2}$ ou $4z^2 + (2i-2)z + 6 - 3i = 0$

$\Delta = (2i-2)^2 - 16(6-3i) = -4 - 8i + 4 - 96 + 48i$

$\Delta = -96 + 40i$

calcul de δ : $|\Delta| = \sqrt{96^2 + 40^2} = 104$

$\delta = \sqrt{\frac{104-96}{2}} + i\sqrt{\frac{104+96}{2}} = 2 + 10i$

$z' = \frac{-2i + 2 + 2 + 10i}{8} = \frac{4+8i}{8} = \frac{1}{2} + i$

$z'' = \frac{-2i + 2 - 2 - 10i}{8} = -\frac{3}{2}i$

$S = \left\{\frac{3}{2} ; \frac{1}{2} + i ; -\frac{3}{2}i\right\}$

c) $M_0\left(\frac{3}{2}\right)$, $M_1\left(\frac{1}{2} + i\right)$, $M_2\left(-\frac{3}{2}i\right)$

$M_0M_1 = \left|\frac{1}{2} + i - \frac{3}{2}\right| = |-1 + i| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$M_0M_2 = \left|-\frac{3}{2}i - \frac{3}{2}\right| = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{9}{2}}$

$M_1M_2 = \left|\frac{1}{2} + i + \frac{3}{2}i\right| = \left|\frac{1}{2} + \frac{5}{2}i\right| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{25}{4}} = \sqrt{\frac{26}{4}} = \sqrt{\frac{13}{2}}$

$M_0M_1^2 + M_0M_2^2 = 2 + \frac{9}{2} = \frac{13}{2} = M_1M_2^2$

D'après la réciproque du théo de Pythagore le $\Delta(M_0 M_1 M_2)$ est rectangle en M_0. (2

2) $Z = \frac{z+1-i}{z+i}$ avec $z = x+yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ et $z \neq -i$

$= \frac{x+yi+1-i}{x+yi+i} \cdot \frac{x-yi-i}{x-yi-i}$

$= \frac{x^2 \cancel{-xyi} - xi + \cancel{xyi} + y^2 + y + x - yi - i - xi - y - 1}{x^2 + (y+1)^2}$

$= \frac{x^2 + x + y^2 - 1}{x^2+(y+1)^2} + i \frac{-2x-y-1}{x^2+(y+1)^2}$

$M(z) \in A \Leftrightarrow -2x-y-1 = 0 \Leftrightarrow y = -2x-1 \equiv d$

or $-1 = -2 \cdot 0 - 1$ donc $I(-i) \in d$ et $A = d \setminus \{I\}$

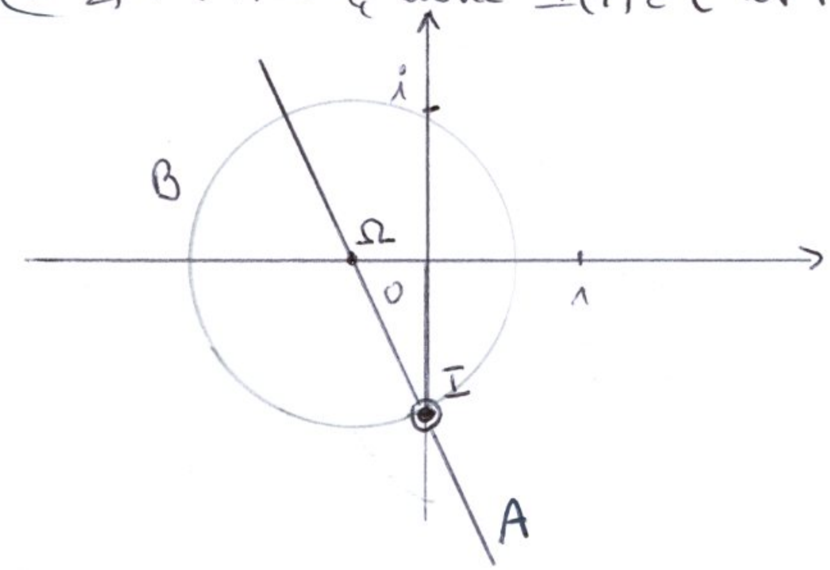
$M(z) \in B \Leftrightarrow x^2 + x + y^2 - 1 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + 2x \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + y^2 = 1 + \frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow (x+\frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{5}{4}$

ép. du cercle $\mathcal{C}$ de centre $\Omega(-\frac{1}{2}, 0)$ et de rayon $r = \frac{\sqrt{5}}{2}$

or $(0+\frac{1}{2})^2 + (-1)^2 \overset{!}{=} \frac{5}{4}$ donc $I(-i) \in \mathcal{C}$ et $B = \mathcal{C} \setminus \{I\}$



II 1) a) $M(x,y) \in \mathcal{E} \Leftrightarrow MF = \frac{\sqrt{3}}{2} Md$ (équation focale)

$\Leftrightarrow MF^2 = \frac{3}{4} Md^2$

$\Leftrightarrow (x-3)^2 + (y-2)^2 = \frac{3}{4}\left[(x-12)^2 + (y-y)^2\right]$

$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 + (y-2)^2 = \frac{3}{4}(x^2 - 24x + 144)$

$\Leftrightarrow \frac{1}{4}x^2 + 12x + (y-2)^2 = 99 \quad | \cdot 4$

$\Leftrightarrow x^2 + 48x + 4(y-2)^2 = 396 \quad | + 24^2$

$\Leftrightarrow (x+24)^2 + 4(y-2)^2 = 972$ (équation cartésienne)

b) $\frac{\sqrt{3}}{2} < 1$ donc $\mathcal{C}$ = ellipse (conique à centre)

posons : $\begin{cases} X = x+24 \\ Y = y-2 \end{cases}$ et $\Omega(-24,2)$ alors dans le repère $(\Omega,\vec{i},\vec{j})$:

$$\mathcal{C} \equiv X^2+4Y^2=972 \equiv \frac{X^2}{972}+\frac{Y^2}{243}=1$$

$a=\sqrt{972}=18\sqrt{3}$

$b=\sqrt{243}=9\sqrt{3}$

$b^2=a^2-c^2 \Leftrightarrow c^2=972-243=729 \Leftrightarrow c=27$

axe focal : $(\Omega X)=m$

centre : $\Omega(0,0)$

sommets : $S_1(18\sqrt{3},0)$, $S_2(-18\sqrt{3},0)$, $S_3(0,9\sqrt{3})$, $S_4(0,-9\sqrt{3})$

foyers : $F_1(27,0)$, $F_2(-27,0)$

directrices : $d_1 \equiv X=\frac{972}{27} \equiv X=36$, $d_2 \equiv X=-36$

Dans $(O,\vec{i},\vec{j})$: $\Omega(-24,2)$

axe focal : $m \equiv y=2$

$S_1(18\sqrt{3}-24,2)$, $S_2(-18\sqrt{3}-24,2)$, $S_3(-24,9\sqrt{3}+2)$, $S_4(-24,-9\sqrt{3}+2)$

$F_1(3,2)$, $F_2(-51,2)$

$d_1 \equiv x=12$, $d_2 \equiv x=-60$ $(d_1=d)$

2) $t \perp d \Leftrightarrow$ pente de $t = -\frac{1}{\frac{1}{5}}=-5$ d'où $t \equiv y=-5x+k$

$\mathcal{P} \equiv x=-\frac{1}{4}y^2-y+2 \equiv -4x=y^2+4y-8 \equiv (y+2)^2=12-4x$

$\equiv (y+2)^2=-4(x-3)$ (éq. d'une parabole de sommet $S(3,-2)$)

Soit $M(x_0,y_0)\in\mathcal{P}$ et t la tangente à $\mathcal{P}$ en M :

$t \equiv (y_0+2)(y+2)=-2(x-3)-2(x_0-3)$

pente de $t = -\frac{2}{y_0+2}$ ($y_0 \neq -2$, vérifié car la tangente en S est $\parallel (Oy)$)

D'où : $-\frac{2}{y_0+2}=-5 \Leftrightarrow y_0=-\frac{8}{5}$

or : $(y_0+2)^2=-4(x_0-3) \Leftrightarrow \frac{4}{25}=-4(x_0-3) \Leftrightarrow x_0=\frac{74}{25}$

$M\left(\frac{74}{25},-\frac{8}{5}\right)\in t$ donc $-\frac{8}{5}=-\frac{74}{5}+k \Leftrightarrow k=\frac{66}{5}$

D'où : $\underline{t \equiv y=-5x+\frac{66}{5}}$

autre méthode :

$M(x,y)\in t\cap\mathcal{P} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{1}{4}y^2-y+2 & (1) \\ y=-5x+k & (2) \end{cases}$

$(2) \to (1): x = -\frac{1}{4}(-5x+k)^2 - (-5x+k) + 2 \quad |\cdot(-4)$

$\Leftrightarrow -4x = 25x^2 - 10xk + k^2 - 20x + 4k - 8$

$\Leftrightarrow 25x^2 - 2x(5k+8) + k^2 + 4k - 8 = 0 \quad (*)$

$\Delta = 4(5k+8)^2 - 100(k^2+4k-8)$

$= 100k^2 + 320k + 256 - 100k^2 - 400k + 800$

$= -80k + 1056$

t = tangente à $\mathcal{P} \Leftrightarrow (*)$ a une solution unique

$\Leftrightarrow \Delta = 0$

$\Leftrightarrow k = \frac{1056}{80} = \frac{66}{5}$

D'où : $t \equiv y = -5x + \frac{66}{5}$

III 1) $\Gamma \equiv \begin{cases} x = \frac{2k}{1+k^2} = f(k) & (1) \\ y = \frac{2k^2}{1+k^2} = g(k) & (2) \end{cases}$

$\left.\begin{array}{l} f(-k) = -f(k) \\ g(-k) = g(k) \end{array}\right\}$ d'où (Oy) = axe de symétrie de Γ

$(1)|\cdot k \Leftrightarrow x \cdot k = \frac{2k^2}{1+k^2} = y$

- si $x = 0$: $2k = 0 \Leftrightarrow k = 0$ donc $y = 0$ donc $O(0,0) \in \Gamma$

- si $x \neq 0$: $k = \frac{y}{x}$

$\to (1): x = \frac{2 \cdot \frac{y}{x}}{1 + \frac{y^2}{x^2}} = \frac{2xy}{x^2+y^2} \quad |:x$

$\Leftrightarrow 1 = \frac{2y}{x^2+y^2}$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 2y$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2y + 1 = 1$

$\Leftrightarrow x^2 + (y-1)^2 = 1$

éq. du cercle $\mathcal{C}$ de centre $\Omega(0,1)$

et de rayon $r = 1$

$x = 0 \Leftrightarrow (y-1)^2 = 1 \Leftrightarrow y-1 = 1$ ou $y-1 = -1$

$\Leftrightarrow y = 2$ ou $y = 0$

donc $O(0,0) \in \mathcal{C}$ et $I(0,2) \in \mathcal{C}$

Conclusion : $\Gamma = \mathcal{C} \setminus \{I\}$

2) • $\mathcal{C} \equiv x^2+y^2=4(y+1) \equiv x^2+y^2-4y=4 \equiv x^2+y^2-4y+4=8$
$\equiv x^2+(y-2)^2=8$

$\mathcal{C}$ de centre $\Omega(0,2)$ et de rayon $r=2\sqrt{2}$

• Toutes les cordes considérées passent par O, donc leurs équations sont de la forme $d \equiv y=kx$ $(k\in\mathbb{R})$

• Déterminons $\mathcal{C}\cap d$; c'est-à-dire résolvons le système

$$\begin{cases} x^2+(y-2)^2=8 & (1) \\ y=kx & (2) \end{cases}$$

$(2)\to(1)$: $x^2+(kx-2)^2=8 \Leftrightarrow x^2+k^2x^2-4kx+4-8=0$
$\Leftrightarrow x^2(1+k^2)-4kx-4=0$

$\Delta = 16+16(1+k^2)=16(2+k^2)>0$ $(\forall k\in\mathbb{R})$

$x'=\dfrac{4k+4\sqrt{2+k^2}}{2(1+k^2)}=\dfrac{2(k+\sqrt{2+k^2})}{1+k^2}$, $y'=\dfrac{2k(k+\sqrt{2+k^2})}{1+k^2}$

$x''=\dfrac{2(k-\sqrt{2+k^2})}{1+k^2}$, $y''=\dfrac{2k(k-\sqrt{2+k^2})}{1+k^2}$

$\mathcal{C}\cap d=\{I'(x',y'),\ I''(x'',y'')\}$

$M(x,y)\in\mathcal{L} \Leftrightarrow M=\text{mil}\,[I',I'']$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{x'+x''}{2}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{4k}{1+k^2}=\dfrac{2k}{1+k^2} \\ y=\dfrac{y'+y''}{2}=\dfrac{1}{2}\dfrac{4k^2}{1+k^2}=\dfrac{2k^2}{1+k^2} \end{cases}$ (éq. paramé. de $\mathcal{L}$)

d'après 1)
$\Leftrightarrow x^2+(y-1)^2=1$ avec $(x,y)\neq(0,2)$
$\Leftrightarrow M\in\mathcal{C}\setminus\{\Gamma\}$

IV 1) $\left(2x^3-\dfrac{1}{5x}\right)^{13}=\sum_{i=0}^{13}C_{13}^{i}(2x^3)^i\left(-\dfrac{1}{5}\right)^{13-i}x^{-13+i}=\sum_{i=0}^{13}C_{13}^{i}2^i\left(-\dfrac{1}{5}\right)^{13-i}x^{4i-13}$

$4i-13=7 \Leftrightarrow i=5$

terme en x^7 : $C_{13}^{5}2^5\cdot\left(-\dfrac{1}{5}\right)^8x^7=\dfrac{41\,184}{390\,625}$

2) $\Omega=\{RN, RB, BN, BB\}$

$p(RN)=\dfrac{2}{10}\cdot\dfrac{1}{10}=\dfrac{2}{100}$ (car les résultats des deux roues sont indépendants)

$p(RB)=\dfrac{2}{10}\cdot\dfrac{9}{10}=\dfrac{18}{100}$

$p(BN)=\dfrac{8}{10}\cdot\dfrac{1}{10}=\dfrac{8}{100}$

$p(BB)=\dfrac{8}{10}\cdot\dfrac{9}{10}=\dfrac{72}{100}$

$X : \Omega \longrightarrow \{1, 2, 10\}$

$RN \longmapsto 10$

$RB \longmapsto 2$

$BN \longmapsto 2$

$BB \longmapsto 1$

$p(X=1) = \frac{72}{100}$

$p(X=2) = \frac{8}{100} + \frac{18}{100} = \frac{26}{100}$

$p(X=10) = \frac{2}{100}$

$E(X) = \frac{1\cdot 72 + 2\cdot 26 + 10\cdot 2}{100} = 1{,}44$

Non, car le prix à payer pour participer (2€) est plus élevé que la somme que je peux espérer gagner (1,44 €), donc en moyenne je perdrais 0,56€ par partie!

3) a) Expérience de Bernoulli (faire un forage) répétée 30 fois

proba. du succès : $p = \frac{3}{100}$

——— de l'échec : $q = \frac{97}{100}$

X : nombre de succès, loi binomiale :

$p(X=k) = C_{30}^{k} \left(\frac{3}{100}\right)^{k} \left(\frac{97}{100}\right)^{30-k}$, $k = 0, 1, \dots, 30$

$p(X \geq 3) = 1 - p(X<3)$

$= 1 - p(X=0) - p(X=1) - p(X=2)$

$= 1 - 0{,}97^{30} - 30 \cdot 0{,}03 \cdot 0{,}97^{29} - C_{30}^{2} 0{,}03^{2} \cdot 0{,}97^{28}$

$\simeq 0{,}06$

b) Soit n le nombre de forages cherché :

$p(X \geq 1) \geq 0{,}99$

$\Leftrightarrow 1 - p(X=0) \geq 0{,}99$

$\Leftrightarrow 0{,}01 \geq C_{n}^{0}\, 0{,}03^{0} \cdot 0{,}97^{n}$

$\Leftrightarrow 0{,}01 \geq 0{,}97^{n}$ | ln

$\Leftrightarrow \ln 0{,}01 \geq n \ln 0{,}97$ | $: \ln 0{,}97 < 0$

$\Leftrightarrow \frac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}97} \leq n$

$\simeq 151{,}19$

Il faut donc procéder à 152 forages au moins.