Corrigé

Question I

1) bi ($b \in \mathbb{R}$) est une racine de $P(z) = z^3 + (2+3i)z^2 + (7+i)z + 10 + 6i$

$\Leftrightarrow -b^3 i + (2+3i)\,b^2\cdot(-1) + (7+i)\,bi + 10 + 6i = 0$

$\Leftrightarrow -b^3 i - 2b^2 - 3b^2 i + 7bi - b + 10 + 6i = 0$

$\Leftrightarrow \underbrace{(-2b^2 - b + 10)}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{(-b^3 - 3b^2 + 7b + 6)}_{\in \mathbb{R}}\, i = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2b^2 - b + 10 = 0 & (1) \\ \text{et} & \\ -b^3 - 3b^2 + 7b + 6 = 0 & (2) \end{cases}$$

Résolvons (1) : $\Delta = 81$ $\quad b_1 = \frac{1+9}{-4} = \frac{-5}{2}$; $b_2 = \frac{1-9}{-4} = 2$

$b_2 = 2$ est une solution de (2) ; $b_1 = \frac{-5}{2}$ n'est pas une solution de (2).

Donc $2i$ est une racine de $P(z)$

HORNER :

	1	$2+3i$	$7+i$	$10+6i$
$2i$		$2i$	$-10+4i$	$-10-6i$
	1	$2+5i$	$-3+5i$	0

Donc $P(z) = \left(z^2 + (2+5i)z - 3 + 5i\right)\cdot(z - 2i)$.

Résolvons $z^2 + (2+5i)z - 3 + 5i = 0$.

$$\begin{aligned} \Delta &= (2+5i)^2 - 4\cdot(-3+5i) \\ &= 4 + 20i - 25 + 12 - 20i \\ &= -9 = (3i)^2 \end{aligned}$$

D'où $z_1 = \frac{-2-5i+3i}{2} = -1-i$; $z_2 = \frac{-2-5i-3i}{2} = -1-4i$

Ainsi $S = \{2i ; -1-i ; -1-4i\}$

2) a)

$$z_1 = \frac{6\sqrt{3} + 2i}{2 + i\sqrt{3}} = \frac{(6\sqrt{3}+2i)(2-i\sqrt{3})}{4+3} = \frac{12\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 4i - 18i}{7}$$

$$= 2\sqrt{3} - 2i \qquad \text{forme algébrique de } z_1$$

$|z_1| = \sqrt{12+4} = 4$

$$\left.\begin{aligned} &\tan \varphi_1 = \frac{-2}{2\sqrt{3}} = \frac{-\sqrt{3}}{3} \\ &\varphi_1 \text{ est dans le } 4^e \text{ quadrant} \end{aligned}\right\} \text{donc } \varphi_1 = \frac{-\pi}{6} + k\cdot 2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

ainsi $z_1 = 4\cdot \operatorname{cis} \frac{-\pi}{6}$ $\qquad$ forme trigonométrique de z_1

b) $\dfrac{(z_1)^5}{(z_2)^4} = \dfrac{\left(4 \operatorname{cis} -\frac{\pi}{6}\right)^5}{\left(4\sqrt{3} \operatorname{cis} \frac{\pi}{3}\right)^4} = \dfrac{4^5 \cdot \operatorname{cis} \frac{-5\pi}{6}}{4^4 \cdot 3^2 \cdot \operatorname{cis} \frac{4\pi}{3}}$

$= \frac{4}{9} \operatorname{cis} \frac{-13\pi}{6} = \underline{\underline{\frac{4}{9} \operatorname{cis} \frac{-\pi}{6}}}$

forme trigo.

c) $z_2 = 4\sqrt{3} \operatorname{cis} \frac{\pi}{3} = 4\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i \sin\frac{\pi}{3}\right)$

$= 4\sqrt{3} \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$= 2\sqrt{3} + 6i$

$z_3 = z_1 - z_2 = -8i = 8 \operatorname{cis} \frac{3\pi}{2}$

$z = r \cdot \operatorname{cis} \varphi$ est une racine cubique complexe de $8 \operatorname{cis} \frac{3\pi}{2}$

$\Leftrightarrow r^3 \operatorname{cis} 3\varphi = 8 \operatorname{cis} \frac{3\pi}{2}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} r^3 = 8 \\ \text{et} \\ 3\varphi = \frac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} r = 2 \\ \text{et} \\ \varphi = \frac{\pi}{2} + k \cdot \frac{2\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$

$\Leftrightarrow z = 2 \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{2} + k \cdot \frac{2\pi}{3}\right)$

où $k \in \{0; 1; 2\}$

Les racines cubiques complexes de $-8i$ sont : $z_0 = 2 \operatorname{cis} \frac{\pi}{2}$, $z_1 = 2 \operatorname{cis} \frac{7\pi}{6}$, $z_2 = 2 \operatorname{cis} \frac{11\pi}{6}$

Question II

1) a) $\begin{vmatrix} m-1 & -2 & 1-m \\ m & 1 & 1 \\ 1 & 2 & m \end{vmatrix}$

$= m(m-1) - 2 + 2m(1-m) - (1-m) - 2(m-1) + 2m^2$

$= m^2 - 1$

Le système admet une seule solution si $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$

b) Lorsque $m = 1$:

$\begin{cases} -2y = 2 \\ x + y + z = 0 \\ x + 2y + z = -1 \end{cases} (*) \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x + z = 1 \\ x + z = 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x = 1 - z \end{cases}$ système simplement indéterminé

Poser : $\beta = z$

$\begin{cases} x = 1 - \beta \\ y = -1 \\ z = \beta \end{cases}$ $S = \{(1-\beta; -1; \beta) \mid \beta \in \mathbb{R}\}$

Int. géom. : $(*)$ est un système d'équations de 3 plans de l'espace dont l'intersection est la droite passant par $A(1; -1; 0)$ et de vecteur dir. $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Lorsque $m = -1$:

$\begin{cases} -2x - 2y + 2z = 2 \\ -x + y + z = -2 \\ x + 2y - z = -1 \end{cases} \begin{vmatrix} \cdot \frac{1}{2} \\ \\ \\ \end{vmatrix} \quad (**)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -x - y + z = 1 \\ -x + y + z = -2 \\ x + 2y - z = -1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -2y = 3 \\ -x + y + z = -2 \\ x + 2y - z = -1 \end{cases}$ $E_1 / E_1 - E_2$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{-3}{2} \\ -x + z = \frac{-1}{2} \quad | \cdot (-1) \\ x - z = 2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{-3}{2} \\ x - z = \frac{1}{2} \\ x - z = 2 \end{cases}$ > impossible $S = \emptyset$

Int. géom. : $(**)$ est un système d'éq. de 3 plans de l'espace dont l'intersection est vide.

2) a) $A(4;-5;4)$ $B(0;3;-8)$

$M(x;y;z) \in d$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires

$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}, \ \overrightarrow{AM} = k \cdot \overrightarrow{AB}$

$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}, \ \begin{pmatrix} x-4 \\ y+5 \\ z-4 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ -12 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}, \ \begin{cases} x = -4k+4 \\ y = 8k-5 \\ z = -12k+4 \end{cases}$ syst. d'éq. param. de la droite d

Pour déterminer $\pi \cap d$, remplaçons les éq. param. de d dans l'éq. de π.

$3(-4k+4) - 6(8k-5) + 9(-12k+4) = -6$

$\Leftrightarrow -168k + 78 = -6$

$\Leftrightarrow k = \frac{1}{2}$

D'où : $\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \\ z = -2 \end{cases}$

et $d \cap \pi = \{ I(2;-1;-2) \}$

b) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ -12 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d

$\vec{n}\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 9 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal de π

$\frac{-3}{4} \cdot \overrightarrow{AB} = \vec{n}$ donc $d \perp \pi$.

c) Le plan α admet comme équation

$3x - 6y + 9z = c$.

Déterminons c :

$B(0;3;-8) \in \alpha$

$\Leftrightarrow 3 \cdot 0 - 6 \cdot 3 + 9 \cdot (-8) = c$

$\Leftrightarrow c = -90$

Une éq. cartésienne du plan α est $x - 2y + 3z = -30$

Question III

1) $(3x^2 - x)^{12} = \sum_{k=0}^{12} C_{12}^{k} \, 3^{12-k} \cdot x^{24-2k} \cdot (-1)^k \cdot x^k$

Condition : $24 - 2k + k = 17$

$\Leftrightarrow \underline{k = 7}$

Le terme cherché est :

$C_{12}^{7} \ (-1)^7 \cdot 3^5 \cdot x^{17}$

$= \frac{12!}{5!\,7!} \cdot (-1) \cdot 243 \cdot x^{17}$

$= \underline{-192'456 \ x^{17}}$

2) a) $C_4^1 \cdot C_{28}^3 = 4 \cdot \frac{28!}{3!\,25!} = \underline{\underline{13'104}}$

mains de 4 cartes dont exact. 1 roi.

b) $C_4^1 \cdot C_4^2 \cdot C_{24}^1 = 4 \cdot 6 \cdot 24 = \underline{576}$

mains de 4 cartes dont exact. 1 roi et 2 valets.

c) $8 \cdot C_4^3 \cdot C_{28}^1 = 8 \cdot 4 \cdot 28 = \underline{\underline{896}}$

mains de 4 cartes dont exactement 3 cartes ont la même valeur.

3) 10 ampoules élect. dont 4 sont défectueuses

$\# \Omega = A_{10}^5 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = \underline{30'240}$ cas possibles

a) p (obtenir 4 défect. suivies d'1 non défect.)

$= \frac{A_4^4 \cdot 6}{A_{10}^5} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 6}{30'240} = \frac{1}{210} = \underline{\underline{0,48\%}}$

b) p (obtenir au moins 1 défectueuse)

$= 1 - p$ (aucune défectueuse)

$= 1 - \frac{A_6^5}{A_{10}^5} = 1 - \frac{1}{42} = \frac{41}{42} = \underline{\underline{97,62\%}}$