Examen de fin d'études secondaires 2015 – Mathématiques I (section D) – Corrigé

Exercice 1 **(14 points)**

Soit $P(z) = z^3 + (1+3i)\,z^2 + (m+10i)\,z - 4m(2-i)$ avec $m \in \mathbb{R}$.
Déterminer la valeur du paramètre réel m sachant que $(-2i)$ est une racine de P.
Résoudre ensuite l'équation $P(z) = 0$.

$P(z) = z^3 + (1+3i)\,z^2 + (m+10i)\,z - 4m(2-i)$

$P(z)$ admet $(-2i)$ comme racine si et seulement si $P(-2i) = 0$. On a :

$$\begin{aligned}
P(-2i) = 0 &\Leftrightarrow (-2i)^3 + (1+3i)\cdot(-2i)^2 + (m+10i)\cdot(-2i) - 4m\,(2-i) = 0\\
&\Leftrightarrow -8i^3 + (1+3i)\cdot(4i^2) - 2mi - 20i^2 - 8m + 4mi = 0\\
&\Leftrightarrow 8i - 4 - 12i - 2mi + 20 - 8m + 4mi = 0\\
&\Leftrightarrow (16-8m) + (-4+2m)\cdot i = 0\\
&\Leftrightarrow \begin{cases}16-8m=0\\-4+2m=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m=2\\m=2\end{cases}
\end{aligned}$$

Donc : $P(z) = z^3 + (1+3i)\,z^2 + (2+10i)\,z - 8(2-i)$ 3p

Comme $(-2i)$ est une racine de P, on en déduit que $P(z)$ est divisible par $(z+2i)$.

Schéma de Horner :

	1	$1+3i$	$2+10i$	$-16+8i$
$-2i$	$\downarrow$	$-2i$	$2-2i$	$16-8i$
	1	$1+i$	$4+8i$	0

$$\boldsymbol{P(z) = (z+2i)\underbrace{\left(z^2+(1+i)z+4+8i\right)}_{Q(z)}}$$ 3p

Résolvons $Q(z) = 0$:

$z^2 + (1+i)z + 4 + 8i = 0$ $\quad \begin{cases}a=1\\b=1+i\\c=4+8i\end{cases}$

- $$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac\\ &= (1+i)^2 - 4(4+8i)\\ &= 1 + 2i - 1 - 16 - 32i\\ &= -16 - 30i\end{aligned}$$ 1p

- Racines carrées complexes (rcc) de $\Delta = -16 - 30i$.

  Soit $\delta = x + yi$ une rcc de Δ avec $x, y \in \mathbb{R}$. Alors :
  $$\begin{aligned}&\delta^2 = \Delta\\ \Leftrightarrow\ &(x+yi)^2 = -16-30i\\ \Leftrightarrow\ &(x^2-y^2) + 2xyi = -16-30i\end{aligned}$$

En tenant compte de la condition sur les modules, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -16 & (1) \\ 2xy = -30 & (2) \quad |< 0 \Rightarrow x \text{ et } y \text{ sont de signes contraires} \\ x^2 + y^2 = 34 & (3) \quad |x^2 + y^2 = \sqrt{(-16)^2 + (-30)^2} = \sqrt{256+900} = \sqrt{1156} = 34 \end{cases}$$ 2p

$(3) + (1) : 2x^2 = 18 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3$

$(3) - (1) : 2y^2 = 50 \Leftrightarrow y^2 = 25 \Leftrightarrow y = \pm 5$ 2p

Les rcc de Δ sont donc :
$\delta = 3 - 5i$ et $\delta' = -\delta = -3 + 5i$

- Les solutions de l'équation $z^2 + (1+i)z + 4 + 8i = 0$ sont :

$$\boldsymbol{z_1} = \frac{-b-\delta}{2a} = \frac{-(1+i)-(3-5i)}{2} = \frac{-4+4i}{2} = \boldsymbol{-2+2i}$$

$$\boldsymbol{z_2} = \frac{-b+\delta}{2a} = \frac{-(1+i)+(3-5i)}{2} = \frac{2-6i}{2} = \boldsymbol{1-3i}$$

Donc : $P(z) = (z+2i)(z+2-2i)(z-1+3i)$

et : $P(z) = 0 \Leftrightarrow z = -2i$ ou $z = -2+2i$ ou $z = 1-3i$

$\boldsymbol{S = \{-2i;\ -2+2i;\ 1-3i\}}$ 3p

Exercice 2 **(5+5+6=16 points)**

1) Ecrire le nombre complexe Z sous forme trigonométrique et sous forme algébrique : $Z = \frac{(2i-2\sqrt{3})^5}{\left(2\,\mathrm{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^6}$

Soit : $z_1 = 2i - 2\sqrt{3} = -2\sqrt{3} + 2i$

Module de z_1 :

$$|\boldsymbol{z_1}| = \sqrt{\left(-2\sqrt{3}\right)^2 + 2^2} = \sqrt{12+4} = \sqrt{16} = \boldsymbol{4}$$

Argument de z_1 :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\arg(z_1)} &= \arctan\left(\frac{2}{-2\sqrt{3}}\right) + \pi \quad [2\pi] \\ &= \arctan\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \pi \quad [2\pi] \\ &= -\frac{\pi}{6} + \pi \quad [2\pi] \\ &= \boldsymbol{\frac{5\pi}{6}} \quad [2\pi] \end{aligned}$$

Alternative :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{z_1} &= -2\sqrt{3} + 2i \\ &= 4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) \\ &= 4\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right) \\ &= \boldsymbol{4\ \mathrm{cis}\left(\frac{5\pi}{6}\right)} \end{aligned}$$

$\boldsymbol{z_1 = 4\ \mathrm{cis}\left(\frac{5\pi}{6}\right)}$ 2p

$$\boldsymbol{Z} = \frac{(2i-2\sqrt{3})^5}{\left(2\,\mathrm{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^6} = \frac{\left(4\,\mathrm{cis}\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)^5}{2^6\,\mathrm{cis}\left(\frac{6\pi}{4}\right)} = \frac{4^5\mathrm{cis}\left(\frac{25\pi}{6}\right)}{2^6\,\mathrm{cis}\left(\frac{3\pi}{2}\right)} = \frac{2^{10}\mathrm{cis}\left(\frac{25\pi}{6}\right)}{2^6\,\mathrm{cis}\left(\frac{3\pi}{2}\right)} = 2^4\mathrm{cis}\left(\frac{25\pi}{6} - \frac{3\pi}{2}\right) = 16\ \mathrm{cis}\left(\frac{8\pi}{3}\right) = \boldsymbol{16\ \mathrm{cis}\left(\frac{2\pi}{3}\right)}$$ 2p

$$\boldsymbol{Z} = 16\ \mathrm{cis}\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 16\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = 16\left(-\frac{1}{2} + i\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \boldsymbol{-8 + 8\sqrt{3}\ i}$$ 1p

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante et préciser l'ensemble des solutions : $\frac{z}{i-1} = \overline{z} + 2i$

Soit $\boldsymbol{z = a + bi}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\frac{z}{i-1} = \overline{z} + 2i$$

$$\Leftrightarrow \frac{a+bi}{i-1} = a - bi + 2i$$

$$\Leftrightarrow a + bi = (a - bi + 2i)(i - 1)$$

$$\Leftrightarrow a + bi = ai + b - 2 - a + bi - 2i$$

$$\Leftrightarrow a + bi = (b - a - 2) + i(a + b - 2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = b - a - 2 \\ b = a + b - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2a + 2 \\ a = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{a = 2} \\ \boldsymbol{b = 6} \end{cases} \qquad \boldsymbol{S = \{2 + 6i\}}$$

5p

3) Calculer et donner sous forme trigonométrique les racines cubiques du nombre complexe $w = -27 \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{6}\right)$. Reporter ensuite les points qui ont pour affixes les racines cubiques de w dans le plan de Gauss.

$$\boldsymbol{w} = -27 \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{6}\right) = 27 \operatorname{cis}(\pi) \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{6}\right) = 27 \operatorname{cis}\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \boldsymbol{27 \operatorname{cis}\left(\frac{7\pi}{6}\right)}$$

1p

$\delta = r \cdot cis(\theta)$ est une racine cubique complexe de w si et seulement si

$$\delta^3 = w$$

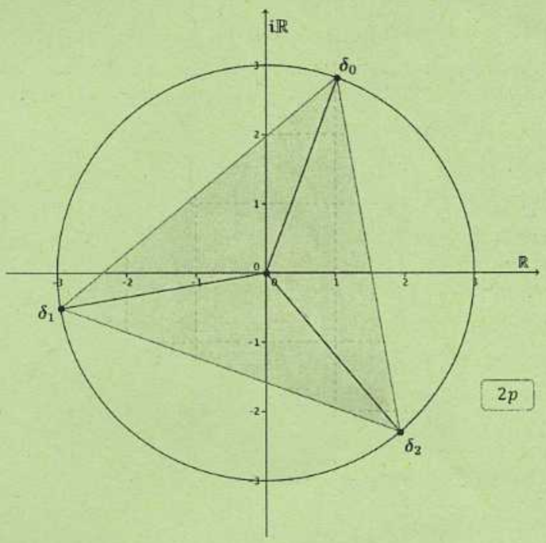
$$\Leftrightarrow [r \cdot \operatorname{cis}(\theta)]^3 = 27 \cdot \operatorname{cis}\left(\frac{7\pi}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow r^3 \cdot \operatorname{cis}(3\theta) = 27 \cdot \operatorname{cis}\left(\frac{7\pi}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r^3 = 27 \\ \operatorname{cis}(3\theta) = \operatorname{cis}\left(\frac{7\pi}{6}\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt[3]{27} \\ 3\theta = \frac{7\pi}{6} + k \cdot 2\pi \quad \text{avec } k \in \{0; 1; 2\} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r = 3 \\ \theta = \frac{7\pi}{18} + k \cdot \frac{2\pi}{3} \quad \text{avec } k \in \{0; 1; 2\} \end{cases}$$



2p

Les racines cubiques complexes de w sont donc : $\delta_k = 3 \cdot \operatorname{cis}\left(\frac{7\pi}{18} + k \cdot \frac{2\pi}{3}\right)$ avec $k \in \{0; 1; 2\}$.

$$\boldsymbol{\delta_0 = 3 \operatorname{cis}\left(\frac{7\pi}{18}\right)} \; ; \quad \boldsymbol{\delta_1 = 3 \operatorname{cis}\left(\frac{19\pi}{18}\right)} \; ; \quad \boldsymbol{\delta_2 = 3 \operatorname{cis}\left(\frac{31\pi}{18}\right)}$$

3p

Exercice 3 **(16 points)**

Résoudre, discuter et interpréter géométriquement suivant les valeurs du paramètre réel m le système suivant : $(S) \equiv \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 3y + mz = 3 \\ x + my + 3z = 2 \end{cases} \quad (m \in \mathbb{R})$

Ecriture matricielle du système $(\mathcal{S})$: $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & m \\ 1 & m & 3 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}}_{B}$

$$\begin{aligned} \mathbf{det}(A) &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & m \\ 1 & m & 3 \end{vmatrix} \\ &= 9 + m - 2m - (-3 + m^2 + 6) \\ &= \boldsymbol{-m^2 - m + 6} \\ &= \boldsymbol{-(m-2)(m+3)} \end{aligned} \qquad \det(A) = 0 \Leftrightarrow m = 2 \;\text{ ou }\; m = -3$$ 2p

1er cas : $m \in \mathbb{R} \setminus \{-3; 2\}$

Si $m \in \mathbb{R} \setminus \{-3; 2\}$, le système $(\mathcal{S})$ est de Cramer et admet une solution unique.

$$\begin{aligned} \mathbf{det}(A_x) &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & m \\ 2 & m & 3 \end{vmatrix} \\ &= 9 + 2m - 3m - (-6 + m^2 + 9) \\ &= \boldsymbol{-m^2 - m + 6} \\ &= \boldsymbol{-(m-2)(m+3)} \end{aligned}$$ 1p

$$\begin{aligned} \mathbf{det}(A_y) &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & m \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 9 + m - 4 - (-3 + 2m + 6) \\ &= -m + 2 \\ &= \boldsymbol{-(m-2)} \end{aligned}$$ 1p

$$\begin{aligned} \mathbf{det}(A_z) &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & m & 2 \end{vmatrix} \\ &= 6 + 3 + 2m - (3 + 3m + 4) \\ &= 2 - m \\ &= \boldsymbol{-(m-2)} \end{aligned}$$ 1p

On en déduit que :

$$\begin{aligned} x &= \frac{\mathbf{det}(A_x)}{\mathbf{det}(A)} \\ &= \frac{-(m-2)(m+3)}{-(m-2)(m+3)} \\ &= \mathbf{1} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} y &= \frac{\mathbf{det}(A_y)}{\mathbf{det}(A)} \\ &= \frac{-(m-2)}{-(m-2)(m+3)} \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{m+3}} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} z &= \frac{\mathbf{det}(A_z)}{\mathbf{det}(A)} \\ &= \frac{-(m-2)}{-(m-2)(m+3)} \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{m+3}} \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{S_m = \left\{\left(1; \frac{1}{m+3}; \frac{1}{m+3}\right), m \in \mathbb{R} \setminus \{-3; 2\}\right\}}$$

Interprétation géométrique :

Si $m \in \mathbb{R} \setminus \{-3; 2\}$, l'intersection des trois plans est le point $I\left(1; \frac{1}{m+3}; \frac{1}{m+3}\right)$. 3p

$\boxed{2^e \text{ cas} : m = -3}$

Si $m = -3$, le système $(\mathcal{S})$ s'écrit : $(\mathcal{S}) \equiv \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 3y - 3z = 3 \\ x - 3y + 3z = 2 \end{cases}$

$$\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -3 & 3 \\ 1 & -3 & 3 & 2 \end{array} \quad \begin{array}{l} L_1 \to L_1 \\ L_2 \to L_2 - 2L_1 \\ L_3 \to L_3 - L_1 \end{array} \quad \to_1 \quad \begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 4 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} L_1 \to L_1 - L_2 \\ L_2 \to L_2 \\ L_3 \to L_3 + 4L_2 \end{array}$$

$$\to_2 \quad \begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}$$

Le système $(\mathcal{S})$ est équivalent au système suivant : $(\mathcal{S}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y - z = 1 \\ \mathbf{0 = 5 \quad impossible} \end{cases}$

L'équation auxiliaire étant impossible, le système n'admet pas de solution. $\boldsymbol{S_{(-3)}} = \emptyset$

Interprétation géométrique :

Si $m = -3$, les trois plans n'ont aucun point en commun. $\boxed{3p}$

$\boxed{3^e \text{ cas} : m = 2}$

Si $m = 2$, le système $(\mathcal{S})$ s'écrit : $(\mathcal{S}) \equiv \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 3y + 2z = 3 \\ x + 2y + 3z = 2 \end{cases}$

$$\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \end{array} \quad \begin{array}{l} L_1 \to L_1 \\ L_2 \to L_2 - 2L_1 \\ L_3 \to L_3 - L_1 \end{array} \quad \to_1 \quad \begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} L_1 \to L_1 - L_2 \\ L_2 \to L_2 \\ L_3 \to L_3 - L_2 \end{array}$$

$$\to_2 \quad \begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & -5 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Le système $(\mathcal{S})$ est équivalent au système suivant : $(\mathcal{S}) \Leftrightarrow \begin{cases} x - 5z = 0 \\ y + 4z = 1 \\ \mathbf{0 \stackrel{!}{=} 0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5z \\ y = 1 - 4z \\ z \text{ est libre} \end{cases}$

En posant $z = \gamma$ avec $\gamma \in \mathbb{R}$, le système s'écrit : $(\mathcal{S}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5\gamma \\ y = 1 - 4\gamma \\ z = \gamma \end{cases} \quad (\gamma \in \mathbb{R}).$ $\boxed{3p}$

$\boldsymbol{S_2 = \{(5\gamma; 1 - 4\gamma; \gamma), \gamma \in \mathbb{R}\}}$

Interprétation géométrique :

Si $m = 2$, l'intersection des trois plans est une droite passant par le point $A(0; 1; 0)$ et ayant comme vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$. $\boxed{2p}$

Exercice 4 **(2+2+3+4+3=14 points)**

Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère le point $A(-1;-2;3)$, le vecteur $\vec{n}(-3;2;-1)$ ainsi que la droite d définie par : $d \equiv \begin{cases} x+2z=3 \\ 2x-y+z=1 \end{cases}$

1) Déterminer une équation cartésienne du plan π passant par le point A et de vecteur normal $\vec{n}$.

Comme $\vec{n}(-3;2;-1)$ est un vecteur normal au plan π, une équation cartésienne de π est donnée par :

$\pi \equiv -3x+2y-z+d=0$ avec $d \in \mathbb{R}$.

De plus :

$$\begin{aligned} & A(-1;-2;3) \in \pi \\ \Leftrightarrow\ & -3\cdot(-1)+2\cdot(-2)-3+d=0 \\ \Leftrightarrow\ & 3-4-3+d=0 \\ \Leftrightarrow\ & d=4 \end{aligned}$$

D'où : $\boldsymbol{\pi \equiv 3x-2y+z-4=0}$ 2p

2) Le vecteur $\vec{v}(-2;3;0)$ est-il un vecteur directeur du plan π ? Justifier !

Le vecteur $\vec{v}(-2;3;0)$ est un vecteur directeur du plan π si et seulement si il est orthogonal au vecteur normal $\vec{n}(-3;2;-1)$. On a :

$\boldsymbol{\vec{n}\cdot\vec{v}=(-2)\cdot(-3)+3\cdot 2+0\cdot(-1)=6+6=12\neq 0}$

Donc $\boldsymbol{\vec{v}(-2;3;0)}$ n'est pas un vecteur directeur du plan $\boldsymbol{\pi}$. 2p

3) Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite d et caractériser la droite d par la donnée d'un point et d'un vecteur directeur.

$$d \equiv \begin{cases} x+2z=3 \\ 2x-y+z=1 \end{cases}$$

En posant $z=\gamma$ avec $\gamma \in \mathbb{R}$, on obtient : $\begin{cases} x=3-2\gamma \\ y=2(3-2\gamma)+\gamma-1 \\ z=\gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x=3-2\gamma} \\ \boldsymbol{y=5-3\gamma} \\ \boldsymbol{z=\ \ \ \ \ \ \gamma} \end{cases} \quad (\gamma \in \mathbb{R})$

$\boldsymbol{d}$ est la droite passant par $\boldsymbol{B(3;5;0)}$ et ayant comme vecteur directeur $\boldsymbol{\vec{u}(-2;-3;1)}$. 3p

4) Quelle est l'intersection de la droite d et du plan π ?

$$I(x;y;z) \in \pi \cap d$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2y+z-4=0 \\ x=3-2\gamma \\ y=5-3\gamma \\ z=\ \ \ \ \ \ \gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\cdot(3-2\gamma)-2\cdot(5-3\gamma)+\gamma-4=0 \\ x=3-2\gamma \\ y=5-3\gamma \\ z=\ \ \ \ \ \ \gamma \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9-6\gamma-10+6\gamma+\gamma-4=0 \\ x=3-2\gamma \\ y=5-3\gamma \\ z=\ \ \ \ \ \ \gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma=5 \\ x=3-2\cdot 5 \\ y=5-3\cdot 5 \\ z=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{\gamma=5} \\ \boldsymbol{x=-7} \\ \boldsymbol{y=-10} \\ \boldsymbol{z=5} \end{cases}$$

Donc :

$\boldsymbol{\pi \cap d=\{I\}}$ avec $\boldsymbol{I(-7;-10;5)}$ 4p

5) Déterminer un système d'équations cartésiennes de la droite Δ qui passe par $B(0;4;-2)$ et qui est parallèle à d.

La droite Δ étant parallèle à la droite d, on a : $\Delta \equiv \begin{cases} x + 2z = a \\ 2x - y + z = b \end{cases}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.

De plus :

$B(0;4;-2) \in \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} 0 + 2 \cdot (-2) = a \\ 2 \cdot 0 - 4 - 2 = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = -6 \end{cases}$

D'où :

$\Delta \equiv \begin{cases} \boldsymbol{x + 2z = -4} \\ \boldsymbol{2x - y + z = -6} \end{cases}$ 3p

Alternative :

Comme la droite Δ est parallèle à la droite d, elle admet également $\vec{u}(-2;-3;1)$ comme vecteur directeur. Un système d'équations cartésiennes de la droite Δ est donc donné par :

$\Delta \equiv \begin{cases} x = -2k & (1) \\ y = -3k + 4 & (2) \quad (k \in \mathbb{R}) \\ z = k - 2 & (3) \end{cases}$

D'après (3) : $k = z + 2$

En remplaçant dans (1) et (2), on obtient un système d'équations cartésiennes de la droite Δ :

$\Delta \equiv \begin{cases} \boldsymbol{x + 2z = -4} \\ \boldsymbol{y + 3z = -2} \end{cases}$