$\boxed{\text{Corrigé}}$ Repêchage

Exercice 1 (10 points)

(a) $|z_1| = \sqrt{3+1} = 2$

$\begin{cases} \cos\varphi_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\varphi_1 = \frac{1}{2} \end{cases}$ p.ex. $\varphi_1 = \frac{\pi}{6}$ et $z_1 = 2\text{cis}\,\frac{\pi}{6}$

$|z_2| = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}} = \sqrt{2}$

$\begin{cases} \cos\varphi_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \\ \sin\varphi_2 = \frac{\sqrt{6}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ p.ex. $\varphi_2 = \frac{\pi}{3}$ et $z_2 = \sqrt{2}\text{cis}\,\frac{\pi}{3}$

$$Z = \frac{(2\text{cis}\,\frac{\pi}{6})^5}{\text{cis}\,\frac{\pi}{2}\cdot(\sqrt{2}\text{cis}\,\frac{\pi}{3})^2} = \frac{2^5\cdot\text{cis}\,\frac{5\pi}{6}}{\text{cis}\,\frac{\pi}{2}\cdot 2\text{cis}\,\frac{2\pi}{3}} = 2^4\cdot\text{cis}\,\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$= 16\cdot\text{cis}\,\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 16\cdot\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right] = 16\cdot\left(\frac{1}{2}-i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 8-8\sqrt{3}\,i$$

(b) $z^4 = 16\cdot\text{cis}\,\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

$\Leftrightarrow$ z est une racine quatrième de Z

$\Leftrightarrow$ z est de la forme $\sqrt[4]{16}\cdot\text{cis}\,\dfrac{-\frac{\pi}{3}+2k\pi}{4}$ avec $k\in\{0;1;2;3\}$

$\Leftrightarrow z = 2\cdot\text{cis}\,\left(-\frac{\pi}{12}\right)$ ou $z = 2\cdot\text{cis}\,\left(-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}\right)$ ou $z = 2\cdot\text{cis}\,\left(-\frac{\pi}{12}+\pi\right)$ ou $z = 2\cdot\left(-\frac{\pi}{12}+\frac{3\pi}{2}\right)$

$\Leftrightarrow z = 2\cdot\text{cis}\,\left(-\frac{\pi}{12}\right)$ ou $z = 2\cdot\text{cis}\,\frac{5\pi}{12}$ ou $z = 2\cdot\text{cis}\,\frac{11\pi}{12}$ ou $z = 2\cdot\text{cis}\,\frac{17\pi}{12}$

$S_{\mathbb{C}} = \left\{2\cdot\text{cis}\,\left(-\frac{\pi}{12}\right); 2\cdot\text{cis}\,\frac{5\pi}{12}; 2\cdot\text{cis}\,\frac{11\pi}{12}; 2\cdot\text{cis}\,\frac{17\pi}{12}\right\}$

Exercice 2 (10 points)

(a)
$$\begin{aligned} P(2+i) &= (2+i)^3-5i(2+i)^2+(-19-4i)\cdot(2+i)+(12+31i) \\ &= 2^3+3\cdot4\cdot i+3\cdot2\cdot i^2+i^3-5i(4+4i-1)-38-19i-8i+4+12+31i \\ &= 8+12i-6-i-20i+20+5i-38-19i-8i+4+12+31i \\ &= 0 \end{aligned}$$

(b) $P(z)$ est divisible par $z-(2+i)$

schéma de Horner:

	1	$-5i$	$-19-4i$	$12+31i$
$\cdot(2+i)$		$2+i$	$8-6i$	$-12-31i$
	1	$2-4i$	$-11-10i$	0

$(2-4i)(2+i) = 4+2i-8i+4 = 8-6i$; $(-11-10i)(2+i) = -22-11i-20i+10 = -12-31i$

$P(z) = [z-(2+i)]\cdot\left[z^2+(2-4i)z+(-11-10i)\right]$

$P(z) = 0 \Leftrightarrow z = 2+i$ ou $\underbrace{z^2+(2-4i)z+(-11-10i)}_{(E)} = 0$

$\Delta = (2-4i)^2-4\cdot1\cdot(-11-10i) = 4-16i-16+44+40i = 32+24i$

$u = x + yi$ est une racine carrée de Δ

$\Leftrightarrow (x+yi)^2 = 32 + 24i$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 32 & (1) \\ 2xy = 24 & (2) \end{cases}$

D'après (2), x et y sont de même signe.

De plus: $x^2 + y^2 = \sqrt{32^2 + 24^2} = 40 \quad (3)$.

$(3) + (1)$: $2x^2 = 72 \Leftrightarrow x^2 = 36 \Leftrightarrow x = 6$ ou $x = -6$

$(3) - (1)$: $2y^2 = 8 \Leftrightarrow y^2 = 4 \Leftrightarrow y = 2$ ou $y = -2$

Les racines carrées de Δ sont $u = 6 + 2i$ et $-u = -6 - 2i$

solutions de (E): $z_1 = \frac{-b+u}{2a} = \frac{-2+4i+6+2i}{2} = 2 + 3i$ et $z_2 = \frac{-b-u}{2a} = \frac{-2+4i-6-2i}{2} = -4 + i$

Finalement: $S_{\mathbb{C}} = \{2+i; 2+3i; -4+i\}$

Exercice 3 **(2 + 3 + 3 + 3 + 1 = 12 points)**

(a) Les vecteurs $\overrightarrow{PQ}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{PR}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires, donc les points P, Q et R définissent un plan π.

(b) $M(x;y;z) \in \pi \quad \Leftrightarrow \overrightarrow{PM}, \overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{PR}$ sont coplanaires

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-3 & 2 & -1 \\ y+2 & 2 & 1 \\ z-4 & -8 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -8 & -2 \end{vmatrix} - (y+2)\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -8 & -2 \end{vmatrix} + (z-4)\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow 4\cdot(x-3) + 12\cdot(y+2) + 4\cdot(z-4) = 0 \quad |:4$$

$$\Leftrightarrow x - 3 + 3y + 6 + z - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x + 3y + z - 1 = 0$$

(c) de (1): $2k = 2 - x \Leftrightarrow k = 1 - \frac{x}{2} \quad (1')$

$(1')$ dans (2): $y = -4 + 3 - \frac{3}{2}x \Leftrightarrow \frac{3}{2}x + y + 1 = 0 \Leftrightarrow 3x + 2y + 2 = 0$

$(1')$ dans (3): $z = 1 + 4 - 2x \Leftrightarrow 2x + z - 5 = 0$

Donc: $d \equiv \begin{cases} 3x + 2y + 2 = 0 \\ 2x + z - 5 = 0 \end{cases}$

(d) Remplaçons les trois équations paramétriques de la droite d dans l'équation cartésienne du plan π.

On obtient: $2 - 2k - 12 + 9k + 1 + 4k - 1 = 0 \Leftrightarrow 11k = 10 \Leftrightarrow k = \frac{10}{11}$

Alors: $x = 2 - \frac{20}{11} = \frac{2}{11}$; $y = -4 + \frac{30}{11} = -\frac{14}{11}$; $z = 1 + \frac{40}{11} = \frac{51}{11}$

Alors: $d \cap \pi = \left\{ I\left(\frac{2}{11}; -\frac{14}{11}; \frac{51}{11}\right) \right\}$

(e) Le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\3\\4\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d et un vecteur normal à π'. Comme $O(0;0;0) \in \pi'$, on a: $\pi' \equiv -2x+3y+4z=0$.

Exercice 4 **(8 points)**

(a) matrice du système: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & m+2 & m \\ 2 & m+1 & m^2-1 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
\text{dét}\, A &= 1 \cdot \begin{vmatrix} m+2 & m \\ m+1 & m^2-1 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ m+1 & m^2-1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ m+2 & m \end{vmatrix} \\
&= m^3 - m + 2m^2 - 2 - m^2 - m - 3(m^2-1-m-1) + 2(m-m-2) \\
&= m^3 - m + 2m^2 - 2 - m^2 - m - 3m^2 + 3 + 3m + 3 - 4 \\
&= m^3 - 2m^2 + m \\
&= m(m^2 - 2m + 1) \\
&= m(m-1)^2
\end{aligned}$$

Alors: (S) a une solution unique $\Leftrightarrow$ dét $A \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 0$ et $m \neq 1$

(b) Pour $m=0$: (S) $\begin{cases} x+y+z=1 & (1) \\ 3x+2y=-3 & (2) \\ 2x+y-z=-4 & (3) \end{cases}$

de (2): $2y = -3-3x \Leftrightarrow y = -\frac{3}{2} - \frac{3}{2}x \quad (2')$

$(2')$ dans (1): $x - \frac{3}{2} - \frac{3}{2}x + z = 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x + z = \frac{5}{2} \Leftrightarrow x - 2z = -5$

$(2')$ dans (3): $2x - \frac{3}{2} - \frac{3}{2}x - z = -4 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x - z = -\frac{5}{2} \Leftrightarrow x - 2z = -5$

Alors: $x - 2z = -5 \Leftrightarrow x = -5 + 2z$ et $y = -\frac{3}{2} + \frac{15}{2} - 3z \Leftrightarrow y = 6 - 3z$

$S = \{(-5+2z; 6-3z; z) | z \in \mathbb{R}\}$ (système simplement indéterminé)

Les équations du système sont celles de trois plans qui se coupent suivant la droite passant par le point $A(-5;6;0)$, de vecteur directeur le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$

Exercice 5 **(5 + 10 + 5 = 20 points)**

(a)
$$\begin{aligned}
\left(3x^2 - \frac{2}{5x}\right)^{12} &= \sum_{k=0}^{12} C_{12}^k \cdot (3x^2)^k \cdot \left(-\frac{2}{5x}\right)^{12-k} \\
&= \sum_{k=0}^{12} C_{12}^k \cdot 3^k \cdot x^{2k} \cdot \left(-\frac{2}{5}\right)^{12-k} \cdot x^{k-12} \\
&= \sum_{k=0}^{12} C_{12}^k \cdot 3^k \cdot \left(-\frac{2}{5}\right)^{12-k} \cdot x^{3k-12}
\end{aligned}$$

Alors: $3k - 12 = 9 \Leftrightarrow 3k = 21 \Leftrightarrow k = 7$

Le terme en x^9 est alors: $C_{12}^7 \cdot 3^7 \cdot \left(-\frac{2}{5}\right)^5 \cdot x^9 = -792 \cdot 3^7 \cdot \left(-\frac{2}{5}\right)^5 \cdot x^9 = -\frac{55\,427\,328}{3\,125} x^9$

(b) Les choix se font sans ordre, sans répétition: on utilise des combinaisons.

nombre de choix possibles: $C_{18}^{3} = 816$

(1) cas favorables: trois personnes du groupe O *ou bien* trois personnes du groupe A

nombre de cas favorables à E_1: $C_{11}^{3} + C_{4}^{3} = 165 + 4 = 169$

Alors: $p(E_1) = \frac{169}{816} \simeq 0,207$

(2) nombre de cas favorables à $\overline{E_2}$: "trois personnes d'un groupe non A" : $C_{14}^{3} = 364$

Alors: $p(E_2) = 1 - p(\overline{E_2}) = 1 - \frac{364}{816} = \frac{113}{204} \simeq 0,554$

(3) Les dispositions favorables à E_3 sont de la forme $\{O; A; B\}$ *ou bien* $\{O; A; AB\}$ *ou bien* $\{O; B; AB\}$ *ou bien* $\{A; B; AB\}$

nombre de cas favorables à E_3: $11{\cdot}4{\cdot}2+11{\cdot}4{\cdot}1+11{\cdot}2{\cdot}1+4{\cdot}2{\cdot}1 = 88+44+22+8 = 162$

Alors: $p(E_3) = \frac{162}{816} = \frac{27}{136} \simeq 0,199$

(c) Les choix se font avec ordre: on utilise des arrangements.

(1) nombre de mots de passe qu'on peut créer: $26^4 = 456\,976$

(2) nombre de mots de passe de quatre lettres distinctes qu'on peut créer:

$A_{26}^{4} = 26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 = 358\,800$

(3) Les mots de passe qui conviennent sont de la forme $AB\bullet\bullet$ *ou bien* $\bullet AB\bullet$ *ou bien* $\bullet\bullet AB$

nombre de ces mots de passe: $3 \cdot 24 \cdot 23 = 1\,656$