Repêchage

Examen de fin d'études secondaires 2015 – Mathématiques II (sections C et D) – Corrigé

Exercice 1 **(3 points)**

Démontrer que $(\forall a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}), (\forall x \in \mathbb{R}_+^*), (\forall r \in \mathbb{R}) : \log_a(x^r) = r \cdot \log_a(x)$

$(\forall x \in \mathbb{R}_+^* =]0; +\infty[)$, soit : $y = \log_a(x)$. Alors :

$\log_a(x) = y$

$\Leftrightarrow x = a^y$ *(exp$_a$ est la bijection réciproque de log$_a$)*

$\Leftrightarrow x^r = (a^y)^r$ *(en élevant les deux membres à la puissance r)*

$\Leftrightarrow x^r = a^{r\cdot y}$ *(puissance d'une puissance)*

$\Leftrightarrow \log_a(x^r) = r \cdot y$ *(log$_a$ est la bijection réciproque de exp$_a$)*

$\Leftrightarrow \log_a(x^r) = r \cdot \log_a(x)$

3p

Exercice 2 **(5+4+2+2+2+3+5+5=28 points)**

Soit la fonction f définie par : $f(x) = 5(x+3) \cdot e^{-2-x}$

1) Déterminer le domaine de définition de f, calculer les limites aux bornes de ce domaine et étudier l'existence d'asymptotes.

Domaine : $\mathbf{dom}\, f = \mathbb{R}$ 0,5p

Limites et branches infinies

Pour $x \to -\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)$$
$$= \lim_{x\to-\infty} 5(x+3)\cdot e^{-2-x} \quad ("-\infty\cdot(+\infty)")$$
$$= -\infty$$

0,5p

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$$
$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{5(x+3)\cdot e^{-2-x}}{x} \quad \left("\frac{-\infty}{-\infty}" f.i.\right)$$
$$\overset{H}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{5\cdot e^{-2-x} + 5(x+3)\cdot e^{-2-x}\cdot(-1)}{1}$$
$$= \lim_{x\to-\infty} \left(5\cdot e^{-2-x} - 5(x+3)\cdot e^{-2-x}\right)$$
$$= \lim_{x\to-\infty} 5e^{-2-x}\cdot(1-x-3)$$
$$= \lim_{x\to-\infty} 5e^{-2-x}\cdot(-x-2) \quad ("+\infty\cdot(+\infty)")$$
$$= +\infty$$

La courbe $\mathcal{C}_f$ de f admet une **branche parabolique (B.P.)** à gauche **suivant la direction de l'axe des ordonnées (Oy)**.

2p

Pour $x \to +\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)$$
$$= \lim_{x\to+\infty} 5(x+3)\cdot e^{-2-x} \quad ("+\infty\cdot 0^+" f.i.)$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{5(x+3)}{e^{x+2}} \quad \left("\frac{+\infty}{+\infty}" f.i.\right)$$
$$\overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{5}{e^{x+2}} \quad \left("\frac{5}{+\infty}"\right)$$
$$= 0^+$$

La courbe $\mathcal{C}_f$ de f admet une **asymptote horizontale (A.H.) à droite d'équation $y = 0$.**

2p

2) Calculer la dérivée première et la dérivée seconde de f.

$(\forall x \in \operatorname{dom} f' = \mathbb{R})$, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 5 \cdot e^{-2-x} + 5(x+3) \cdot e^{-2-x} \cdot (-1) \\ &= 5 \cdot e^{-2-x} - 5(x+3) \cdot e^{-2-x} \\ &= 5e^{-2-x} \cdot (1 - x - 3) \\ &= \underbrace{5e^{-2-x}}_{>0} \cdot (-x-2) \end{aligned}$$

La dérivée première a même signe que $(-x-2)$.

$\boxed{2p}$

$(\forall x \in \operatorname{dom} f'' = \mathbb{R})$, on a :

$$\begin{aligned} f''(x) &= -5e^{-2-x} \cdot (-x-2) + 5e^{-2-x} \cdot (-1) \\ &= 5e^{-2-x}(x+2) - 5e^{-2-x} \\ &= 5e^{-2-x} \cdot (x + 2 - 1) \\ &= \underbrace{5e^{-2-x}}_{>0} \cdot (x+1) \end{aligned}$$

La dérivée seconde a même signe que $(x+1)$.

$\boxed{2p}$

3) Établir le tableau de variation de f.

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
$f''(x)$		$-$		$-$	0	$+$	
courbure			concave		$p.i.$	convexe	
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\overset{max}{M}$	$\searrow$	$\overset{p.i.}{I}$	$\searrow$	0^+

$\boxed{2p}$

4) Déterminer les coordonnées (valeurs exactes) des extremums et des points d'inflexion éventuels.

On a : $f(-2) = 5 \cdot (-2+3) \cdot e^{-2-(-2)} = 5 \cdot 1 \cdot e^0 = 5 \cdot 1 = 5$

et : $f(-1) = 5 \cdot (-1+3) \cdot e^{-2-(-1)} = 5 \cdot 2 \cdot e^{-1} = 10 \cdot e^{-1} = \frac{10}{e} \approx 3{,}7$

Maximum absolu : $\boldsymbol{M(-2;5)}$

Point d'inflexion : $\boldsymbol{I\left(-1;\frac{10}{e}\right)}$

$\boxed{2p}$

5) Déterminer les coordonnées (valeurs exactes) des points d'intersection du graphe cartésien de f avec les axes.

Intersection avec l'axe des abscisses $(\boldsymbol{Ox})$:

$$\begin{aligned} & f(x) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & 5 \cdot (x+3) \cdot \underbrace{e^{-2-x}}_{>0} = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x + 3 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x = -3 \end{aligned}$$

$\mathcal{C}_f \cap (Ox) = \{A\}$ avec $\boldsymbol{A(-3;0)}$

$\boxed{1p}$

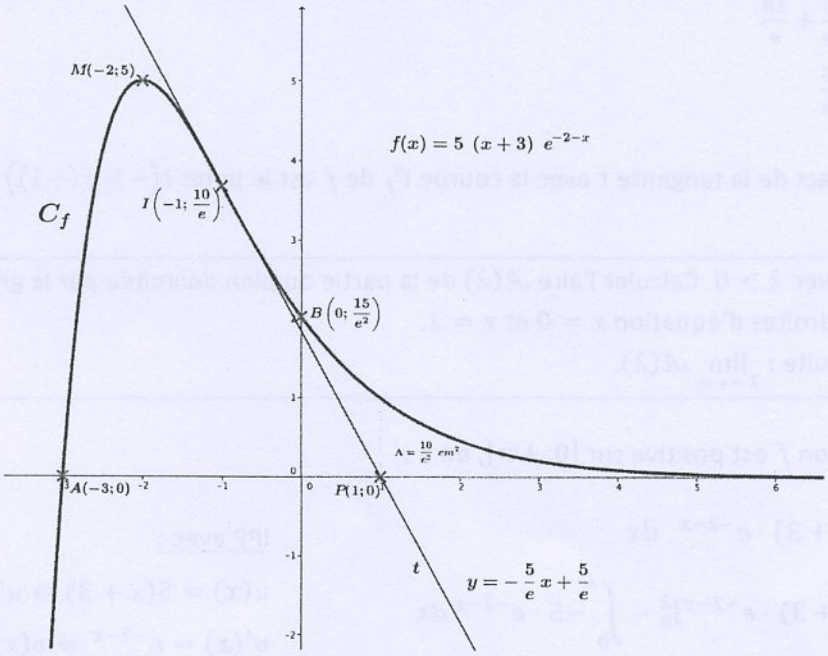
Intersection avec l'axe des ordonnées $(\boldsymbol{Oy})$:

$$\begin{aligned} & f(0) \\ &= 5 \cdot (0+3) \cdot e^{-2-0} \\ &= 15 \cdot e^{-2} \\ &= \frac{15}{e^2} \approx 2{,}0 \end{aligned}$$

$\mathcal{C}_f \cap (Oy) = \{B\}$ avec $\boldsymbol{B\left(0;\frac{15}{e^2}\right)}$

$\boxed{1p}$

6) Représenter f graphiquement dans un repère orthonormé (unité : 1 cm).



3p

7) Établir une équation de la tangente t au graphe de f passant par le point $P(1;0)$. Déterminer ensuite les coordonnées (valeurs exactes) du point de contact de t avec le graphe de f et tracer la tangente t.

L'équation de la tangente t à la courbe C_f de f au point d'abscisse a s'écrit :

$$y = f'(a) \cdot (x - a) + f(a)$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{y = 5e^{-a-2} \cdot (-a-2) \cdot (x-a) + 5(a+3) \cdot e^{-a-2}}$$

1p

Pour que le point $P(1;0)$ soit un point de la tangente t, il faut que ses coordonnées vérifient l'équation ci-dessus. On doit donc résoudre l'équation suivante :

$$0 = 5e^{-a-2} \cdot (-a-2) \cdot (1-a) + 5(a+3) \cdot e^{-a-2}$$

$$\Leftrightarrow 5e^{-a-2} \cdot [(-a-2) \cdot (1-a) + (a+3)] = 0$$

$$\Leftrightarrow 5e^{-a-2} \cdot (-a + a^2 - 2 + 2a + a + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow 5e^{-a-2} \cdot (a^2 + 2a + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{5e^{-a-2}}_{>0} \cdot (a+1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (a+1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow a + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{a = -1}$$

2p

Il existe donc une et une seule tangente t à la courbe C_f de f passant par le point $P(1;0)$.
Son équation s'écrit :

$$y = f'(-1) \cdot (x+1) + f(-1)$$

$$\Leftrightarrow y = 5e^{-1} \cdot (-1) \cdot (x+1) + 5 \cdot 2 \cdot e^{-1}$$

$\Leftrightarrow y = -\frac{5}{e}(x+1) + \frac{10}{e}$

$\Leftrightarrow y = -\frac{5}{e}x - \frac{5}{e} + \frac{10}{e}$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{y = -\frac{5}{e}x + \frac{5}{e}}$

Le point de contact de la tangente t avec la courbe C_f de f est le point $I(-1; f(-1)) = \boldsymbol{I\left(-1; \frac{10}{e}\right)}$.

2p

8) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ avec $\lambda > 0$. Calculer l'aire $\mathcal{A}(\lambda)$ de la partie du plan délimitée par le graphe de f, l'axe des x et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \lambda$.
Calculer ensuite : $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \mathcal{A}(\lambda)$.

Comme la fonction f est positive sur $[0; +\infty[$, on a :

$$\boldsymbol{\mathcal{A}(\lambda)} = \int_0^\lambda 5(x+3) \cdot e^{-2-x} \, dx$$

$$= \left[-5(x+3) \cdot e^{-2-x}\right]_0^\lambda - \int_0^\lambda -5 \cdot e^{-2-x} \, dx$$

IPP avec :

$u(x) = 5(x+3) \Rightarrow u'(x) = 5$

$v'(x) = e^{-2-x} \Rightarrow v(x) = -e^{-2-x}$

$$= \left[-5(x+3) \cdot e^{-2-x}\right]_0^\lambda + 5\int_0^\lambda e^{-2-x} \, dx$$

$$= -5 \cdot \left[(\lambda+3) \cdot e^{-2-\lambda} - 3e^{-2}\right] + 5 \cdot \left[-e^{-2-x}\right]_0^\lambda$$

$$= -5\lambda e^{-2-\lambda} - 15e^{-2-\lambda} + 15e^{-2} - 5e^{-2-\lambda} + 5e^{-2}$$

$$= \boldsymbol{-5\lambda e^{-2-\lambda} - 20e^{-2-\lambda} + 20e^{-2}} \text{ u.a.}$$

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \boldsymbol{\mathcal{A}(\lambda)}$$

$$= \lim_{\lambda \to +\infty} \left[-5\lambda e^{-2-\lambda} - 20e^{-2-\lambda} + 20e^{-2}\right]$$

$$= \lim_{\lambda \to +\infty} \left[\frac{-5\lambda}{e^{2+\lambda}} - \frac{20}{e^{2+\lambda}} + \frac{20}{e^2}\right] \quad \left(\text{"}0^- - \frac{20}{+\infty} + \frac{20}{e^2}\text{"}\right)$$

$$= \boldsymbol{\frac{20}{e^2}} \text{ u.a.}$$

$$\approx 2{,}71 \text{ cm}^2$$

Calcul à part :

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \frac{-5\lambda}{e^{2+\lambda}}$$

$$\overset{H}{=} \lim_{\lambda \to +\infty} \frac{-5}{e^{2+\lambda}} \quad \left(\text{"}\frac{-5}{+\infty}\text{"}\right)$$

$$= 0^-$$

2p

Exercice 3 (4+9=13 points)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ et préciser à chaque fois l'ensemble des solutions :

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$: $2^{1-x} + 6 \cdot 2^x > 8$

$(\forall x \in \mathbb{R})$:

$2^{1-x} + 6 \cdot 2^x > 8$

$\Leftrightarrow 2 \cdot 2^{-x} + 6 \cdot 2^x > 8 \qquad | \cdot 2^x > 0$

$\Leftrightarrow 2 + 6 \cdot 2^{2x} > 8 \cdot 2^x$

$\Leftrightarrow 6 \cdot 2^{2x} - 8 \cdot 2^x + 2 > 0 \quad | \div 2 > 0$

$\Leftrightarrow 3\cdot 2^{2x}-4\cdot 2^x+1>0 \quad$ posons : $2^x=t>0$

$\Leftrightarrow 3\cdot t^2-4\cdot t+1>0$

$\Leftrightarrow t<\frac{1}{3}\ \text{ ou }\ t>1$

$\Leftrightarrow 2^x<\frac{1}{3}\ \text{ ou }\ 2^x>1$

$\Leftrightarrow 2^x<2^{\log_2\left(\frac{1}{3}\right)}\ \text{ ou }\ 2^x>2^0$

$\overset{\text{bij}\nearrow}{\Leftrightarrow} x<\log_2\left(\frac{1}{3}\right)\ \text{ ou }\ x>0$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{x<-\log_2(3)\ \text{ ou }\ x>0}$

$\boldsymbol{S=\,]-\infty;-\log_2(3)[\,\cup\,]0;+\infty[}$

Résolvons :

$3t^2-4t+1=0 \qquad \Delta=16-12=4$

$\Leftrightarrow t=\frac{4-2}{6}\ \text{ ou }\ t=\frac{4+2}{6}$

$\Leftrightarrow t=\frac{1}{3}\ \text{ ou }\ t=1$

t	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$3t^2-4t+1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

4p

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$: $3\cdot\log_9\left(\frac{x}{2}-1\right)^{\frac{1}{3}}=\frac{9}{2}\cdot\log_{27}(x-2)-\log_3(2)$

Conditions d'existence :

$\frac{x}{2}-1>0\ \text{ et }\ x-2>0$

$\Leftrightarrow x>2 \qquad \text{et} \quad x>2$

Domaine :

$\boldsymbol{D=\,]2;+\infty[}$

1p

$(\forall x\in D)$:

$3\cdot\log_9\left(\frac{x}{2}-1\right)^{\frac{1}{3}}=\frac{9}{2}\cdot\log_{27}(x-2)-\log_3(2)$

$\Leftrightarrow 3\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{\log_3\left(\frac{x}{2}-1\right)}{\log_3(3^2)}=\frac{9}{2}\cdot\frac{\log_3(x-2)}{\log_3(3^3)}-\log_3(2)$

$\Leftrightarrow \frac{\log_3\left(\frac{x}{2}-1\right)}{2\cdot\log_3(3)}=\frac{9}{2}\cdot\frac{\log_3(x-2)}{3\cdot\log_3(3)}-\log_3(2)$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\cdot\log_3\left(\frac{x}{2}-1\right)=\frac{3}{2}\cdot\log_3(x-2)-\log_3(2) \quad |\cdot 2$

$\Leftrightarrow \log_3\left(\frac{x}{2}-1\right)=3\cdot\log_3(x-2)-2\cdot\log_3(2)$

$\Leftrightarrow \log_3\left(\frac{x}{2}-1\right)=\log_3(x-2)^3-\log_3(2^2)$

$\Leftrightarrow \log_3(4)+\log_3\left(\frac{x}{2}-1\right)=\log_3(x-2)^3$

$\Leftrightarrow \log_3\left(4\cdot\left(\frac{x}{2}-1\right)\right)=\log_3(x-2)^3$

$\overset{\text{bij}\nearrow}{\Leftrightarrow} 4\cdot\left(\frac{x}{2}-1\right)=(x-2)^3$

$\Leftrightarrow 2x-4=x^3-6x^2+12x-8$

$\Leftrightarrow x^3-6x^2+10x-4=0$

4p

$3\cdot\log_9\left(\frac{x}{2}-1\right)^{\frac{1}{3}}=\frac{9}{2}\cdot\log_{27}(x-2)-\log_3(2)$

$\Leftrightarrow 3\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{\ln\left(\frac{x}{2}-1\right)}{\ln(3^2)}=\frac{9}{2}\cdot\frac{\ln(x-2)}{\ln(3^3)}-\frac{\ln(2)}{\ln(3)}$

$\Leftrightarrow \frac{\ln\left(\frac{x}{2}-1\right)}{2\cdot\ln(3)}=\frac{9}{2}\cdot\frac{\ln(2-x)}{3\cdot\ln(3)}-\frac{\ln(2)}{\ln(3)} \quad |\cdot\ln(3)$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\cdot\ln\left(\frac{x}{2}-1\right)=\frac{3}{2}\cdot\ln(x-2)-\ln(2) \quad |\cdot 2$

$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{x}{2}-1\right)=3\cdot\ln(x-2)-2\cdot\ln(2)$

$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{x}{2}-1\right)=\ln(x-2)^3-\ln(2^2)$

$\Leftrightarrow \ln(2^2)+\ln\left(\frac{x}{2}-1\right)=\ln(x-2)^3$

$\Leftrightarrow \ln\left(4\cdot\left(\frac{x}{2}-1\right)\right)=\ln(x-2)^3$

Notons :

$\boldsymbol{P(x)=x^3-6x^2+10x-4} \qquad Div(-4)=\{\pm1;\pm2;\pm4\}$

- $P(1) = 1 - 6 + 10 - 4 = 1 \neq 0$
- $P(-1) = -1 - 6 - 10 - 4 = -21 \neq 0$
- $P(2) = 8 - 24 + 20 - 4 \overset{!}{=} 0$

Donc $P(x)$ est divisible par $(x-2)$.

<u>Schéma de Horner :</u>

	1	-6	10	-4
2		2	-8	4
	1	-4	2	0

2p

$\boldsymbol{P(x) = (x-2) \cdot (x^2 - 4x + 2)}$

On a :

$$P(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2) \cdot (x^2 - 4x + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 2 = 0 \quad \text{ou} \quad x^2 - 4x + 2 = 0 \qquad \Delta = 16 - 8 = 8 = \left(2\sqrt{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \qquad \text{ou} \quad x = \frac{4 - 2\sqrt{2}}{2} \quad \text{ou} \quad x = \frac{4 + 2\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{x = \underbrace{2}_{\substack{\notin D \\ \text{à rejeter}}} \quad \text{ou} \quad x = \underbrace{2 - \sqrt{2}}_{\substack{\approx 0{,}59 \\ \notin D \ \text{à rejeter}}} \quad \text{ou} \quad x = \underbrace{2 + \sqrt{2}}_{\approx 3{,}41}}$$

Finalement :

$\boldsymbol{S = \left\{2 + \sqrt{2}\right\}}$

2p

Exercice 4 **(4+4=8 points)**

1) Calculer : $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x-3}{x+1}\right)^{3x-1}$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x-3}{x+1}\right)^{3x-1} \qquad (\text{"}1^{+\infty}\text{"} \ f.i.)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x+1-4}{x+1}\right)^{3x-1}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{4}{x+1}\right)^{3x-1}$$

Posons :

$$\frac{1}{n} = -\frac{4}{x+1} \Leftrightarrow -4n = x + 1 \Leftrightarrow n = -\frac{x+1}{4} \Leftrightarrow x = -4n - 1$$

Si $x \to +\infty$, alors $n \to -\infty$.

$$= \lim_{n \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3(-4n-1)-1}$$

$$= \lim_{n \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-12n-4}$$

$$= \lim_{n \to -\infty} \left[\underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}_{\to e}\right]^{-12} \cdot \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-4}}_{\to 1}$$

$$= e^{-12} \cdot 1^{-4}$$

$$\boldsymbol{= e^{-12} = \frac{1}{e^{12}}}$$

4p

2) Déterminer les domaines de définition et de dérivabilité, les limites aux bornes du domaine et la fonction dérivée de la fonction f définie par $f(x)=\left(\frac{2}{3}\right)^{4x-1}$.

$$f(x)=\left(\frac{2}{3}\right)^{4x-1}=e^{(4x-1)\cdot\ln\left(\frac{2}{3}\right)}$$

<u>Domaine :</u> $\operatorname{dom} f=\operatorname{dom} f'=\mathbb{R}$ 0,5p

<u>Limites :</u>

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)$$

$$=\lim_{x\to-\infty} e^{(4x-1)\cdot\ln\left(\frac{2}{3}\right)}\qquad\left(\text{"}e^{-\infty\cdot\overbrace{\ln\left(\frac{2}{3}\right)}^{<0}}\text{"}=\text{"}e^{+\infty}\text{"}\right)$$

$$=+\infty$$

1p

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)$$

$$=\lim_{x\to+\infty} e^{(4x-1)\cdot\ln\left(\frac{2}{3}\right)}\qquad\left(\text{"}e^{+\infty\cdot\overbrace{\ln\left(\frac{2}{3}\right)}^{<0}}\text{"}=\text{"}e^{-\infty}\text{"}\right)$$

$$=0^+$$

1p

<u>Dérivée :</u>

$(\forall x\in\operatorname{dom} f'=\mathbb{R})$

$$f'(x)=e^{(4x-1)\cdot\ln\left(\frac{2}{3}\right)}\cdot\left[(4x-1)\cdot\ln\left(\frac{2}{3}\right)\right]'=\left(\frac{2}{3}\right)^{4x-1}\cdot 4\ln\left(\frac{2}{3}\right)$$

1,5p

Exercice 5 **((4+1)+3=8 points)**

1) Soit la fonction f définie par : $f(x)=\dfrac{-x+3}{\sqrt{9-4x^2}}$

a) Déterminer toutes les primitives de f sur $I=\left]-\frac{3}{2}\,;\frac{3}{2}\right[$.

$$\int\frac{-x+3}{\sqrt{9-4x^2}}\,dx$$

$$=\int\frac{-x}{\sqrt{9-4x^2}}\,dx+3\cdot\int\frac{1}{\sqrt{9-4x^2}}\,dx$$

$$=\frac{1}{8}\cdot\int -8x\cdot(9-4x^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx+\frac{3}{2}\cdot\int\frac{2}{3\cdot\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}x\right)^2}}\,dx$$

$$=\frac{1}{8}\cdot 2\cdot(9-4x^2)^{\frac{1}{2}}+\frac{3}{2}\cdot\arcsin\left(\frac{2}{3}x\right)+k,\quad\text{où } k\in\mathbb{R}$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{9-4x^2}+\frac{3}{2}\arcsin\left(\frac{2}{3}x\right)+k,\quad\text{où } k\in\mathbb{R}$$

Donc :

$$\boldsymbol{F(x)=\frac{1}{4}\sqrt{9-4x^2}+\frac{3}{2}\arcsin\left(\frac{2}{3}x\right)+k},\quad\text{où } k\in\mathbb{R}$$

4p

b) Déterminer l'unique primitive de f sur I qui prend la valeur $\frac{1}{4}$ pour $x = 0$.

$$F(0) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{4} \cdot 3 + 0 + k = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \boldsymbol{k = -\frac{1}{2}}$$

La primitive F cherchée est donc définie par :

$$\boldsymbol{F(x) = \frac{1}{4}\sqrt{9 - 4x^2} + \frac{3}{2}\arcsin\left(\frac{2}{3}x\right) - \frac{1}{2}}$$

2) Calculer : $\int_a^b \sin(2x) \cdot \cos(4x)\, dx$ où $a = \frac{\pi}{6}$ et $b = \frac{\pi}{2}$.

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x) \cdot \cos(4x)\, dx$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} [\sin(6x) + \sin(-2x)]\ dx$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left[-\frac{1}{6} \cdot \cos(6x) + \frac{1}{2} \cdot \cos(-2x)\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left[-\frac{1}{6} \cdot \cos(3\pi) + \frac{1}{2} \cdot \cos(-\pi) + \frac{1}{6} \cdot \cos(\pi) - \frac{1}{2} \cdot \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left[-\frac{1}{6} \cdot (-1) + \frac{1}{2} \cdot (-1) + \frac{1}{6} \cdot (-1) - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2} - \frac{1}{6} - \frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)$$

$$= \boldsymbol{-\frac{3}{8}}$$