Corrigé (juin 2015, repêchage)

1. $\begin{cases} 2x - y + 3z = 4 & (1) \\ 2(y-z) - 3(x+2z+1) + 5(x+2y) = -(1-8y+4z) & (2) \\ 2y + \frac{3(x-3)}{2} = \frac{2(x+5y+z)}{3} - \frac{4}{3} & (3) \quad | \cdot 6 \end{cases}$

$(2) \Leftrightarrow 2y - 2z - 3x - 6z - 3 + 5x + 10y + 1 - 8y + 4z = 0$

$\Leftrightarrow 2x + 4y - 4z = 2 \quad | : 2$

$\Leftrightarrow x + 2y - 2z = 1 \quad (2)$

$(3) \Leftrightarrow 12y + 3x - 9 = 2x + 10y + 2z - 8$

$\Leftrightarrow x + 2y - 2z = 1 \quad (3)$

On constate que (2) = (3) donc le système est indéterminé.

Posons $z = r$, alors :

$\begin{cases} 2x - y = 4 - 3r & (1) \quad | \cdot 2 \\ x + 2y = 1 + 2r & (2) \end{cases}$

$2\cdot(1) + (2) : \quad 4x - \cancel{2y} + x + \cancel{2y} = 8 - 6r + 1 + 2r$

$5x = 9 - 4r \quad | : 5$

$x = \frac{9}{5} - \frac{4}{5}r$

$(1) - 2\cdot(2) : \quad \cancel{2x} - y - \cancel{2x} - 4y = 4 - 3r - 2 - 4r$

$-5y = 2 - 7r \quad | : (-5)$

$y = -\frac{2}{5} + \frac{7}{5}r$

$S = \left\{ \left(\frac{9}{5} - \frac{4}{5}r ; -\frac{2}{5} + \frac{7}{5}r ; r \right) \mid r \in \mathbb{R} \right\}$

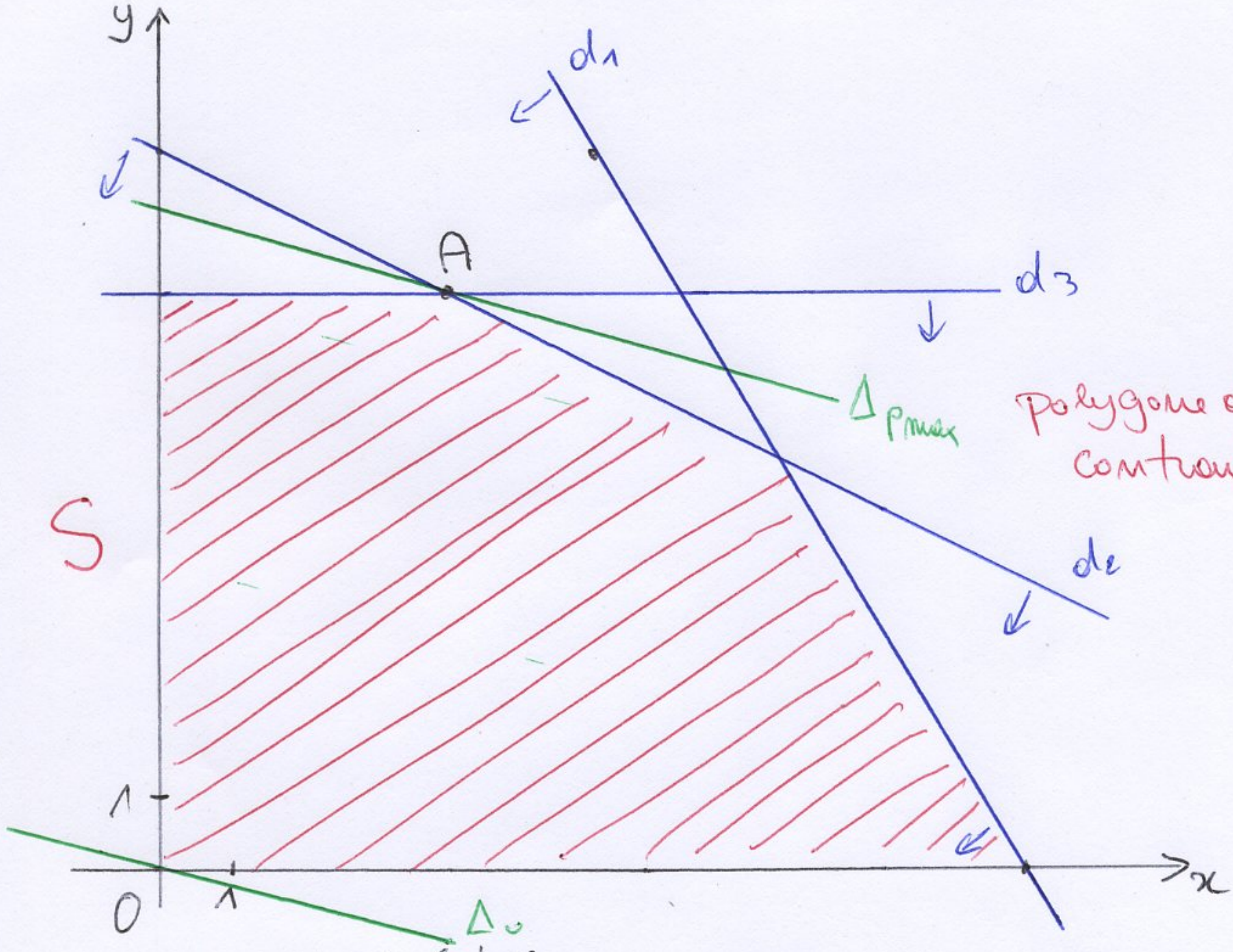
2. a) Soit x le nombre d'objets A produits par jour
et y ——— B ———

temps que marche la machine 1 (en min) : $40x + 24y \leq 480$ (1)
——— 2 ——— : $24x + 48y \leq 480$ (2)
——— 3 ——— : $60y \leq 480$ (3)

Posons : $d_1 \equiv 40x + 24y = 480$, $40\cdot 0 + 24\cdot 0 \leq 480$ vrai donc $O \in S_1$

$d_2 \equiv 24x + 48y = 480$, $24\cdot 0 + 48\cdot 0 \leq 480$ vrai donc $O \in S_2$

$d_3 \equiv 60y = 480 \equiv y = 8$, $60\cdot 0 \leq 480$ vrai donc $O \in S_3$



d_1 :

x	0	6	12
y	20	10	0

d_2 :

x	0	10
y	10	5

De plus $x \geq 0$ (4) et $y \geq 0$ (5)

b) prix de vente de x objets A et de y objets B : $10x + 40y = p$

posons : $\Delta_p \equiv 10x + 40y = p \equiv y = -\frac{1}{4}x + \frac{p}{40}$

toutes ces droites sont parallèles à $\Delta_0 \equiv y = -\frac{x}{4}$

p maxi $\Leftrightarrow A \in \Delta_p$

Or $A \in d_2 \cap d_3$ donc $y_A = 8$ et $24x_A + 48 \cdot 8 = 480 \Leftrightarrow x_A = 4$

$A(4,8) \in \Delta_p \Leftrightarrow 10 \cdot 4 + 40 \cdot 8 = p \Leftrightarrow p = 360$

Conclusion : On obtient le prix de vente maximal de 360 € pour la production de 4 objets A et de 8 objets B.

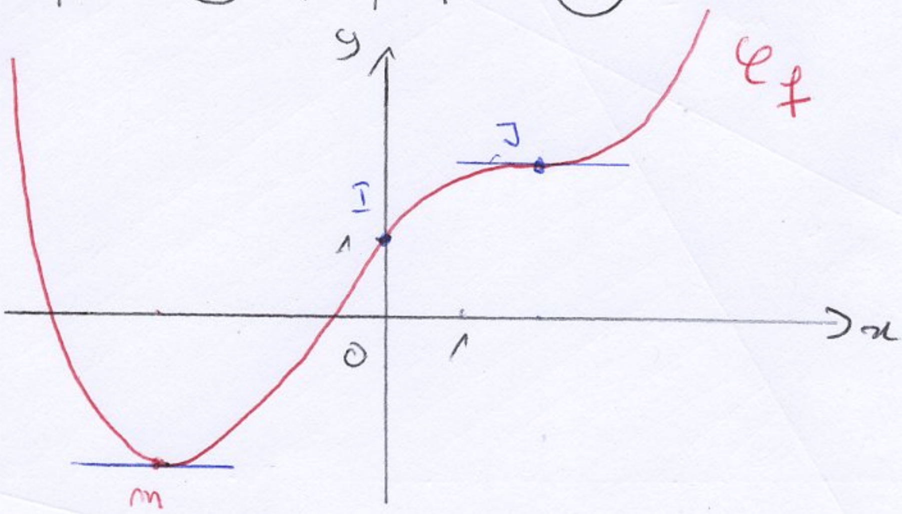
3

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	
f		$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\nearrow$	

1 minimum : $m(-3;-2)$

x		0		2	
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$\mathscr{C}_f$	$\cup$	1	$\cap$	2	$\cup$

2 pts d'inflexion : $I(0;1)$ et $J(2;2)$



4 a) $f(x) = 2x^3 - 4x^2 - 8x + 5$

$f'(x) = 6x^2 - 8x - 8$

$6x^2 - 8x - 8 = 0 \quad | :2 \iff 3x^2 - 4x - 4 = 0$

$\Delta = 16 - 4 \cdot 3 \cdot (-4) = 64$

$x' = \dfrac{4+8}{6} = 2$

$x'' = \dfrac{4-8}{6} = -\dfrac{4}{6} = -\dfrac{2}{3}$

x		$-\frac{2}{3}$		2	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$	$\frac{215}{27}$	$\searrow$	-11	$\nearrow$

$M\left(-\frac{2}{3}; \frac{215}{27}\right)$ = maximum

$m(2;-11)$ = minimum

b) $f''(x) = 12x - 8$

$12x - 8 = 0 \iff x = \dfrac{8}{12} \iff x = \dfrac{2}{3}$

x		$\frac{2}{3}$	
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$\mathscr{C}_f$	$\cap$	$-\frac{41}{27}$	$\cup$

$I\left(\frac{2}{3}; -\frac{41}{27}\right)$ = pt d'inflexion

c) $t \equiv y = px + q$

$p = f'(3) = 22$ d'où : $t \equiv y = 22x + q$

$B(3; f(3)) = B(3; -1)$

$B \in t \Leftrightarrow -1 = 22 \cdot 3 + q \Leftrightarrow q = -1 - 66 \Leftrightarrow q = -67$

D'où : $\underline{t \equiv y = 22x - 67}$

5) $3 - \log(1-2x) = 5 \Leftrightarrow -\log(1-2x) = 5 - 3$

$\Leftrightarrow -\log(1-2x) = 2$

$\Leftrightarrow \log(1-2x) = -2$

$\Leftrightarrow 1 - 2x = 10^{-2}$

$\Leftrightarrow 1 - 10^{-2} = 2x$

$\Leftrightarrow 0{,}99 = 2x$

$\Leftrightarrow \underline{x = 0{,}495}$ $\qquad S = \{0{,}495\}$

6) a) $C(1) = 7500 \cdot 1{,}012$

$C(2) = C(1) \cdot 1{,}012 = 7500 \cdot 1{,}012^2$

$\vdots$

$C(t) = 7500 \cdot 1{,}012^t$

b) $C(t) = 7500 \cdot 1{,}3 \Leftrightarrow 7500 \cdot 1{,}012^t = 9750$

$\Leftrightarrow 1{,}012^t = 1{,}3$

$\Leftrightarrow t \log 1{,}012 = \log 1{,}3$

$\Leftrightarrow t = \dfrac{\log 1{,}3}{\log 1{,}012} \; (\simeq 21{,}99\ldots)$

Réponse : le capital aura augmenté de 30 % après 22 ans

7) posons $x = p(1)$, alors $p(6) = 3x$ et

$p(1) + p(2) + p(3) + p(4) + p(5) + p(6) = 1$

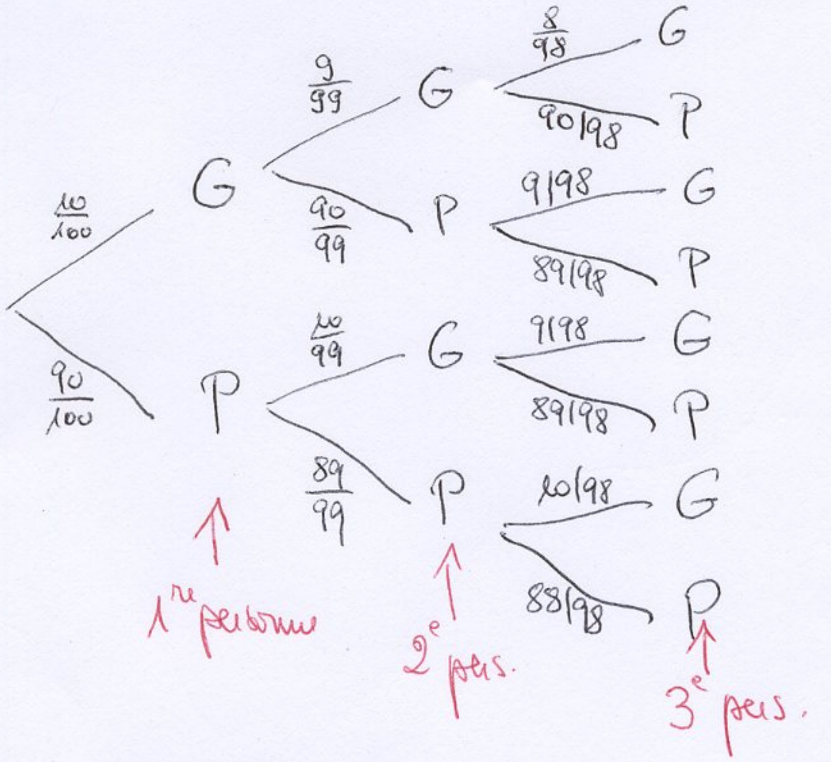
$\Leftrightarrow x + 3x + x + 3x + x + 3x = 1$

$\Leftrightarrow 12x = 1$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{1}{12}$

D'où : $p(1) = \dfrac{1}{12}$ et $p(6) = \dfrac{3}{12} = \dfrac{1}{4}$

8 a) 100 billets : $\begin{cases} 10 \text{ gagnants } (G) \\ 90 \text{ perdants } (P) \end{cases}$



b) i) $p(GGG) = \frac{10}{100} \cdot \frac{9}{99} \cdot \frac{8}{98} = \frac{2}{2695} \simeq 0{,}0007$

ii) p (la 3e p. gagne sachant que la 1re et la 2e p. ont gagné)

$= \frac{8}{98} = \frac{4}{49} \simeq 0{,}0816$

9 $\underbrace{5N,\ 3B,\ 7V}$

a) Nombre de possibilités : C_{15}^{3}

i) $p(3V) = \frac{C_7^3}{C_{15}^3} = \frac{1}{13} \simeq 0{,}0769$

ii) $p(2V+1B) = \frac{C_7^2 \cdot C_3^1}{C_{15}^3} = \frac{9}{65} \simeq 0{,}1385$

iii) $p(\text{au moins } 1V) = 1 - p(0V) = 1 - \frac{C_8^3}{C_{15}^3} = \frac{57}{65} \simeq 0{,}8769$

b) Nombre de possibilités : 15^3

i) $p(3V) = \frac{7^3}{15^3} = \frac{343}{3375} \simeq 0{,}1016$

ii) $p(2V+1B) = \frac{3\cdot 7\cdot 7 + 7\cdot 3\cdot 7 + 7\cdot 7\cdot 3}{15^3} = \frac{441}{3375} \simeq 0{,}130$

iii) $p(\text{au moins } 1V) = 1 - p(0V) = 1 - \frac{8^3}{15^3} = \frac{2863}{3375} \simeq 0{,}8483$