Mathématiques I – Corrigé

Question I 15 points [(7+3)+(3+2)]

1) a) $P(z)=2z^3+(-12-12i)z^2+42i\,z+30-10i \quad (z\in C)$

Soit $b\in IR$; $P(bi)=0 \Leftrightarrow -2b^3i+(12+12i)b^2-42b+30-10i=0$

$\Leftrightarrow -b^3i+6b^2+6ib^2-21b+15-5i=0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6b^2-21b+15=0 \\ -b^3+6b^2-5=0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow b=1$

$P(z)=0 \Leftrightarrow (z-i)\left[2z^2+(-12-10i)z+(10+30i)\right]=0$

$\Leftrightarrow z=i$ ou $z^2+(-6-5i)z+(5+15i)=0 \qquad \Delta=\ldots=9i^2$

$\Leftrightarrow z=i$ ou $z=3+4i$ ou $z=3+i$

$S=\{\,i;3+4i;3+i\,\}$

b) $A(i)$, $B(3+4i)$, $C(3+i)$

$AB=|\,3+4i-i\,|=|\,3+3i\,|=3\sqrt{2}$

$AC=|\,3+i-i\,|=3$

$BC=|\,3+i-3-4i\,|=|-3i\,|=3$

$AC=BC$ et $AC^2+BC^2=AB^2 \Rightarrow$ le triangle ABC est isocèle et rectangle en C.

2) a) $\dfrac{z_D}{z_F}=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{3i}=\dfrac{-\sqrt{3}+i}{-3}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}-\dfrac{1}{3}i=\dfrac{2}{3}cis\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$

$\dfrac{z_E}{z_G}=\dfrac{2-2\sqrt{3}i}{3\sqrt{3}-3i}=\dfrac{2(1-\sqrt{3}i)}{3(\sqrt{3}-i)}\cdot\dfrac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}+i}=\dfrac{2(\sqrt{3}+i-3i+\sqrt{3})}{12}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}-\dfrac{1}{3}i=\dfrac{2}{3}cis\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$

b) On vient de montrer que $z_D=\dfrac{2}{3}cis\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\cdot z_F$ et $z_E=\dfrac{2}{3}cis\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\cdot z_G$, donc D et E sont les images de F et G par l'homothétie h de centre O et de rapport $\dfrac{2}{3}$, suivie de la rotation r de centre O et d'angle (-30)°. Donc le segment $[DE]$ est l'image du segment $[FG]$ par $r\circ h$.

Question II **15 points [3+(3+3)+(3+2+1)]**

1) Tirage sans ordre, sans répétitions -> combinaisons de 52 cartes prises 5 à 5

Le roi de cœur	1	0
3 rois restants	1	2
12 cœurs restants	1	2
36 cartes restantes	2	1

Nombre de mains différentes possibles : $C_1^1 \cdot C_3^1 \cdot C_{12}^1 \cdot C_{36}^2 + C_1^0 \cdot C_3^2 \cdot C_{12}^2 \cdot C_{36}^1 = 22680 + 7128 = 29808$.

2) a) Marquer un panier avec une probabilité de succès $p = 0{,}42$ et une probabilité d'échec $q = 0{,}58$ est une épreuve de Bernoulli. Répéter neuf fois cette expérience dans les mêmes conditions est un schéma de Bernoulli. Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès, X suit une loi binomiale.

$p(X \geq 2) = 1 - p(X=0) - p(X=1) = 1 - C_9^0 0{,}42^0 0{,}58^9 - C_9^1 0{,}42^1 0{,}58^8 \cong 0{,}94$

b) Soit n le nombre d'essais.

$p(X \geq 1) = 1 - p(X=0) = 1 - C_n^0 0{,}42^0 0{,}58^n = 1 - 0{,}58^n$

Condition : $1 - 0{,}58^n > 0{,}95$

$0{,}05 > 0{,}58^n$

$\ln(0{,}05) > n \cdot \ln(0{,}58)$

$\frac{\ln(0{,}05)}{\ln(0{,}58)} < n$

$n > 5{,}499\ldots$

Il doit tirer au moins six fois.

3) a) $\Omega = \{ \{x; y\} \, / \, x \text{ et } y \text{ sont deux boules distinctes de l'urne} \}$ $\quad \# \Omega = C_{n+5}^2$

Soit $X : \Omega \to IR$ la variable aléatoire définie pour tout $\omega \in \Omega$ par :

$$X(\omega) = \begin{cases} 10 & \text{si } \omega \text{ contient deux boules rouges} \\ 2 & \text{si } \omega \text{ contient deux boules bleues} \\ -3 & \text{si } \omega \text{ contient une boule rouge et une boule bleue} \end{cases}$$

$p(X=10) = \frac{C_n^2}{C_{n+5}^2} = \frac{n(n-1)}{(n+5)(n+4)}$ $\qquad p(X=2) = \frac{C_5^2}{C_{n+5}^2} = \frac{20}{(n+5)(n+4)}$

$p(X=-3) = \frac{5n}{C_{n+5}^2} = \frac{10n}{(n+5)(n+4)}$

b) $E(X)=10\cdot\dfrac{n(n-1)}{(n+5)(n+4)}+2\cdot\dfrac{20}{(n+5)(n+4)}-3\cdot\dfrac{10n}{(n+5)(n+4)}=\dfrac{10n^2-40n+40}{(n+5)(n+4)}=\dfrac{10(n-2)^2}{(n+5)(n+4)}$

Le jeu est équitable si $n=2$.

<u>Question III</u> **16 points [(5+5)+6]**

1) a) $x^2-\dfrac{1}{2}y^2+4x+y+\dfrac{3}{2}=0$

$\Leftrightarrow 2x^2-y^2+8x+2y+3=0$

$\Leftrightarrow 2(x^2+4x)-(y^2-2y)+3=0$

$\Leftrightarrow 2(x^2+4x+4)-8-(y^2-2y+1)+1+3=0$

$\Leftrightarrow 2(x+2)^2-(y-1)^2=4$

$\Leftrightarrow \dfrac{(x+2)^2}{2}-\dfrac{(y-1)^2}{4}=1$

Posons $\begin{cases}X=x+2\\Y=y-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=X-2\\y=Y+1\end{cases}$ $\Omega(-2;1)$ dans $(O;\vec{i},\vec{j})$

$\dfrac{X^2}{2}-\dfrac{Y^2}{4}=1$

Γ est une hyperbole de centre Ω et d'axe focal (ΩX)

$a=\sqrt{2}$, $b=2$, $c=\sqrt{2+4}=\sqrt{6}$.

Excentricité $\varepsilon=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}=\sqrt{3}$

	dans $(\Omega;\vec{i},\vec{j})$	dans $(O;\vec{i},\vec{j})$
Sommets	$S_1(\sqrt{2};0)$, $S_2(-\sqrt{2};0)$	$S_1(\sqrt{2}-2;1)$, $S_2(-\sqrt{2}-2;1)$
Axe focal	m : $Y=0$	m' : $y=1$
Foyers	$F(\sqrt{6};0)$, $F'(-\sqrt{6};0)$	$F(\sqrt{6}-2;1)$, $F'(-\sqrt{6}-2;1)$
Directrices	d : $X=\dfrac{2\sqrt{6}}{6}$	d : $x=\dfrac{2\sqrt{6}}{6}-2$
	d' : $X=-\dfrac{2\sqrt{6}}{6}$	d' : $X=-\dfrac{2\sqrt{6}}{6}-2$
Asymptotes	d_1 : $Y=\sqrt{2}X$	d_1 : $y=\sqrt{2}x+(2\sqrt{2}+1)$
	d_2 : $Y=-\sqrt{2}X$	d_2 : $y=-\sqrt{2}x+(1-2\sqrt{2})$

b) $d : y = -\frac{1}{2}x + 15$

Équation d'une droite d_k perpendiculaire à d :

$d_k : y = 2x + k \quad (k \in IR)$

$$\Gamma \cap d_k : \begin{cases} 2x^2 - y^2 + 8x + 2y + 3 = 0 & (1) \\ y = 2x + k & (2) \end{cases}$$

(2) dans (1) : $2x^2 - (2x+k)^2 + 8x + 2(2x+k) + 3 = 0$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 4x^2 - 4kx - k^2 + 8x + 4x + 2k + 3 = 0$

$\Leftrightarrow -2x^2 + (12-4k)x + (-k^2 + 2k + 3) = 0$

$\Delta = (12-4k)^2 + 8(-k^2 + 2k + 3) = 144 - 96k + 16k^2 - 8k^2 + 16k + 24 = 8k^2 - 80k + 168$

d_k est tangente à Γ

$\Leftrightarrow \Delta = 0$

$\Leftrightarrow k^2 - 10k + 21 = 0$

$\Leftrightarrow k = 3$ ou $\Leftrightarrow k = 7$

D'où les tangentes à Γ perpendiculaires à d

$d_3 : y = 2x + 3$ et $d_7 : y = 2x + 7$.

2) $2x - 6 = -\sqrt{15 - 5y^2 - 10y} \Leftrightarrow \sqrt{15 - 5y^2 - 10y} = 6 - 2x$ (*)

C. E. $\quad 6 - 2x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 3$

$-5y^2 - 10y + 15 \geq 0 \Leftrightarrow -3 \leq y \leq 1 \qquad \Delta = 400 \quad y_1 = -3 \quad y_2 = 1$

$\forall x \in]-\infty; 3]$; $\forall y \in [-3; 1]$

$(*) \Leftrightarrow 15 - 5y^2 - 10y = 36 - 24x + 4x^2$

$\Leftrightarrow -5(y^2 + 2y) + 15 = 4(x^2 - 6x) + 36$

$\Leftrightarrow -5(y^2 + 2y + 1) + 5 + 15 = 4(x^2 - 6x + 9) - 36 + 36$

$\Leftrightarrow -5(y+1)^2 + 20 = 4(x-3)^2$

$\Leftrightarrow 4(x-3)^2 + 5(y+1)^2 = 20$

$\Leftrightarrow \frac{(x-3)^2}{5} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1$

Posons $\begin{cases} X = x - 3 \\ Y = y + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = X + 3 \\ y = Y - 1 \end{cases} \qquad \Omega(3; -1)$ dans $(O; \vec{i}, \vec{j})$

$$\frac{X^2}{5}+\frac{Y^2}{4}=1$$

Équation d'une ellipse E de centre Ω et d'axe focal (ΩX)

$a=\sqrt{5}$, $b=2$, $c=\sqrt{5-4}=1$

Sommets dans $(\Omega;\vec{i},\vec{j})$ $\quad S_1(\sqrt{5};0)$ $\quad S_2(-\sqrt{5};0)$ $\quad S_3(0;2)$ $\quad S_4(0;-2)$

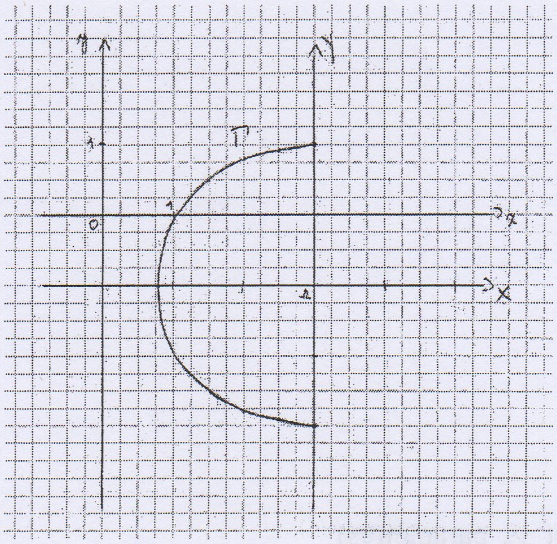
D'après les C.E. $\quad x\le 3 \Leftrightarrow X+3\le 3 \Leftrightarrow X\le 0$

$$-3\le y\le 1 \Leftrightarrow -3\le Y-1\le 1 \Leftrightarrow -2\le Y\le 2$$

$$Y^2=4\left(1-\frac{X^2}{5}\right)$$

$$Y=\pm 2\sqrt{1-\frac{X^2}{5}}$$

X	0	$-0,5$	-1	$-1,5$	-2	$-\sqrt{5}$
Y	2	$\cong 1,9$	$\cong 1,8$	$\cong 1,5$	$\cong 0,9$	0



Γ est la demi-ellipse incluse dans E et située dans le demi-plan défini par l'inéquation $x\le 3$.

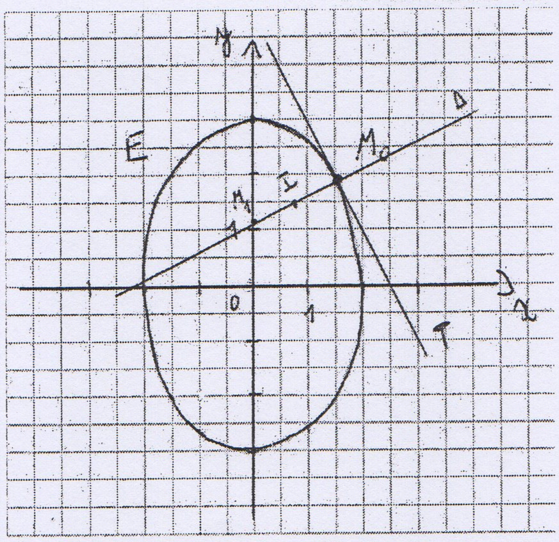
Question IV **14 points (3+11)**

1) $\Gamma:\begin{cases} x=-2+4\cos\theta \\ y=3+3\sin\theta \end{cases} \quad \theta\in[0;2\pi[$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x+2}{4}=\cos\theta \\ \dfrac{y-3}{3}=\sin\theta \end{cases} \quad \theta\in[0;2\pi[$$

$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1 \quad \Leftrightarrow \dfrac{(x+2)^2}{16}+\dfrac{(y-3)^2}{9}=1$

2π étant la plus petite période commune à x et à y, Γ est l'ellipse de centre $\Omega(-2;3)$, de grand axe $2a=8$ et de petit axe $2b=6$.

2) 

Soit $M_0(x_0;y_0)$ un point de E avec $\dfrac{x_0{}^2}{4}+\dfrac{y_0{}^2}{9}=1$. ($x_0$ et y_0 paramètres)

$x_0 \neq 0$ comme $M_0 \notin (Oy)$.

Équation de $T:\dfrac{x_0\cdot x}{4}+\dfrac{y_0\cdot y}{9}=1$

$$9x_0x+4y_0y=36$$

$$y=-\frac{9x_0}{4y_0}x+\frac{9}{y_0} \quad (y_0\neq 0)$$

Pente de $T: m=-\dfrac{9x_0}{4y_0} \quad (y_0\neq 0)$

Pente de $\Delta: m'=\dfrac{4y_0}{9x_0} \quad (x_0\neq 0)$

Équation de Δ : $y-y_0=\dfrac{4y_0}{9x_0}(x-x_0)$

$$y-y_0=\frac{4y_0}{9x_0}x-\frac{4y_0}{9}$$

$$y=\frac{4y_0}{9x_0}x+\frac{5y_0}{9}\Rightarrow M_1\left(0;\frac{5y_0}{9}\right)$$

$$\Rightarrow I\begin{cases} x=\dfrac{x_0+0}{2} \\ y=\dfrac{y_0+\dfrac{5y_0}{9}}{2}\end{cases} \qquad I\begin{cases} x=\dfrac{x_0}{2} \\ y=\dfrac{7y_0}{9}\end{cases} (x_0\neq 0) \text{ et } (y_0\neq 0)$$

$$\frac{x_0^{\ 2}}{4}+\frac{y_0^{\ 2}}{9}=1 \ (1)$$

$x_0=2x$ et $y_0=\dfrac{9}{7}y$ dans (1) : $\dfrac{4x^2}{4}+\dfrac{\dfrac{81}{49}y^2}{9}=1\Leftrightarrow x^2+\dfrac{y^2}{\dfrac{49}{9}}=1$ (*)

Si $y_0=0$, alors Δ est l'axe des x et $I(1;0)$ ou $I(-1;0)$. Dans les deux cas le milieu I de $[M_0M_1]$ vérifie (*).

$x\neq 0$, car $x=\frac{x_0}{2}$ et $x_0\neq 0$.

Finalement L est l'ellipse d'équation cartésienne $x^2+\dfrac{y^2}{\dfrac{49}{9}}=1$ privée des points $S_1\left(0;\dfrac{7}{3}\right)$ et $S_2\left(0;-\dfrac{7}{3}\right)$.