# MATHE I  Corrigé

**Q1** 1) $z_1 = -\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} i$

$|z_1| = \sqrt{\frac{12}{16}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\begin{cases} \cos \varphi_1 = -\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \varphi_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \end{cases}$ (2eq)

$\varphi_1 \equiv \pi - \frac{\pi}{6} \ [2\pi]$

2 pts $\boxed{z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{cis} \frac{5\pi}{6}}$

$z_2 = -16i = 16 \cdot (-i)$

2 pts $\boxed{z_2 = 16 \cdot \operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{2}\right)}$

2) $Z = \frac{z_2}{z_1^3} = \frac{16 \operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 \operatorname{cis}\left(3 \cdot \frac{5\pi}{6}\right)} = \frac{16 \cdot 8}{3\sqrt{3}} \operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{2}\right)$

2 pts $Z = \frac{128\sqrt{3}}{9} \operatorname{cis} \pi$  f. trig.

1 pt $Z = -\frac{128\sqrt{3}}{9}$  f. alg.

3) $z_2 = -16i = 16 \operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

racines quatrièmes: $u_k = \sqrt[4]{16} \operatorname{cis}\left(\frac{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{4}\right)$ $k \in \{0, 1, 2, 3\}$

$u_0 = 2 \operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{8}\right)$

$u_1 = 2 \operatorname{cis} \frac{3\pi}{8}$

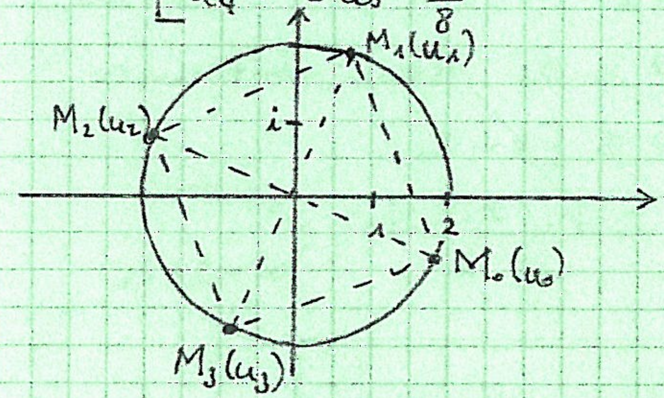
$u_3 = 2 \operatorname{cis} \frac{7\pi}{8}$

$u_4 = 2 \operatorname{cis} \frac{11\pi}{8}$

[ $-\frac{\pi}{8}$ (rad) $= -22,5°$

$\frac{3\pi}{8}$ (rad) $= 67,5°$ ]

2 pts




1 pt

2) $P(z) = z^3 - 2iz^2 + (-6+5i)z + (7-9i)$

(a) $P(2+i) = (2+i)^3 - 2i(2+i)^2 + (-6+5i)(2+i) + (7-9i)$

$= 8 + 12i - 6 - i - 2i(4+4i-1) - 12 - 6i + 10i - 5 + 7 - 9i$

2 pts $= 2 + 11i - 6i + 8 - 10 - 5i$

$= 0$

(b) $P(2+i) = 0 \Rightarrow P(z)$ est divisible par $z - (2+i)$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | $1$ | $-2i$ | $-6+5i$ | $7-9i$ |
| $2+i$ | | $2+i$ | $4+1$ | $-2+10i-i-5$ |
| | $1$ | $2-i$ | $-1+5i$ | $0$ |

3 pts $P(z) = [z-(2+i)]\underbrace{[z^2 + (2-i)z + (-1+5i)]}_{Q(z)}$

$\Delta = (2-i)^2 - 4\cdot 1\cdot(-1+5i)$

$= 4 - 4i - 1 + 4 - 20i$

$= 7 - 24i$

Soit $\delta = a+ib$, avec $a, b \in \mathbb{R}$

$$\delta^2 = \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 7 & (1) \\ -2ab = -24 & (2) \\ a^2 + b^2 = \sqrt{7^2 + (-24)^2} = 25 & (3) \end{cases}$$

(1)+(3) : $2a^2 = 32$, $a = \pm 4$ (3)−(1) : $2b^2 = 18$, $b = \pm 3$

(2) $\Rightarrow$ a et b de signes contraires

3 pts Ainsi $\delta = \pm(4 - 3i)$

$$z_{1,2} = \frac{-(2-i) \pm (4-3i)}{2} \begin{cases} \nearrow 1-i \\ \searrow -3+2i \end{cases}$$

2 pts $\boxed{S = \{2+i \,;\, 1-i \,;\, -3+2i\}}$

Q2 1) $\pi \equiv 3x - 4y + z + 11 = 0$ (1) ; $A(2,1,0)$

2pts (a) $3x_A - 4y_A + z_A + 11 = 3\cdot 2 - 4\cdot 1 + 0 + 11 \neq 0 \Rightarrow \boxed{A \notin \pi}$

(b) $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\-4\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $\pi$, donc un vecteur directeur de d

syst. d'éq. param. de d : $\boxed{d \equiv \begin{cases} x = 2 + 3k & (\alpha) \\ y = 1 - 4k & (\beta) \\ z = 0 + k & (\gamma) \end{cases}}$

2pts

(c) $(\alpha), (\beta), (\gamma)$ dans (1) :

$3(2+3k) - 4(1-4k) + k + 11 = 0$

$\Leftrightarrow 6 + 9k - 4 + 16k + k + 11 = 0$

$\Leftrightarrow 26k = -13$

$\Leftrightarrow k = -\frac{1}{2}$

dans $(\alpha), (\beta), (\gamma)$ : $x = 2 + 3(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$

$y = 1 - 4(-\frac{1}{2}) = 3$

$z = 0 + (-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}$

4pts $\boxed{d \cap \pi = \{I(\frac{1}{2}, 3, -\frac{1}{2})\}}$

2) (a) Le système n'admet pas de solution unique dans $\mathbb{R}^3$

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 5 & -9 & \alpha \\ 3 & -1 & \alpha-4 \\ \alpha-3 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow -30 - 9(\alpha-4)(\alpha-3) + 6\alpha + \alpha(\alpha-3) - 10(\alpha-4) + 3\cdot 9\cdot 6 = 0$

$\Leftrightarrow -30 - 9\alpha^2 + 36\alpha + 27\alpha - 108 + 6\alpha + \alpha^2 - 3\alpha - 10\alpha + 40 + 162 = 0$

$\Leftrightarrow -8\alpha^2 + 56\alpha + 64 = 0$

$\Leftrightarrow \alpha^2 - 7\alpha - 8 = 0$ | $\Delta = 49 + 32 = 81$, $\alpha_{1,2} = \frac{7 \pm 9}{2} \nearrow 8, \searrow -1$

5pts $\Leftrightarrow \underline{\alpha = 8 \text{ ou } \alpha = -1}$

(b) $\alpha = -1$ : $\begin{cases} 5x - 9y - z = 2 & (1) \\ 3x - y - 5z = -1 & (2) \\ -4x + 2y + 6z = 1 & (3) \end{cases}$

$(1) \iff z = 5x - 9y - 2 \quad (1)'$

ds (2) :

$3x - y - 5(5x - 9y - 2) = -1$

$-22x + 44y = -11 \quad |:(-11)$

$2x - 4y = 1 \quad (\alpha)$

ds (3) :

$-4x + 2y + 6(5x - 9y - 2) = 1$

$26x - 52y = 13 \quad |:13$

$2x - 4y = 1 \quad (\beta)$

$(\alpha) \iff (\beta) \iff x = \frac{4y+1}{2} \iff x = 2y + \frac{1}{2}$

dans $(1)'$ : $z = 5(2y + \frac{1}{2}) - 9y - 2$

$z = y + \frac{1}{2}$

poser $y = t$

(5pts) $\boxed{S = \{(2t + \frac{1}{2}, t, t + \frac{1}{2}) \;/\; t \in \mathbb{R}\}}$

$\boxed{IG}$ (1), (2) et (3) sont des équations cartésiennes de trois plans de l'espace non parallèles deux à deux qui se coupent selon une droite d passant par $A(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$ et de

(2pts) vecteur directeur $\vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\underline{Q3}$ 1) $\left(\frac{\sqrt{3}}{x} - 3x^2\right)^{10} = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^{k} (-1)^k \left(\frac{\sqrt{3}}{x}\right)^{10-k} (3x^2)^k$ $(x \neq 0)$

$$= \sum_{k=0}^{10} C_{10}^{k} (-1)^k \left(\sqrt{3}\right)^{10-k} \cdot 3^k \cdot \frac{x^{2k}}{x^{10-k}}$$

$$\frac{x^{2k}}{x^{10-k}} = x^{11}, \forall x \in \mathbb{R}^* \iff 2k - 10 + k = 11$$

$$\iff \underline{k = 7}$$

5 pts terme en $x^{11}$ : $C_{10}^{7} (-1)^7 \left(\sqrt{3}\right)^3 \cdot 3^7 x^{11} = \boxed{-787320\sqrt{3}\, x^{11}}$

3 pts 2) (a) $p(\text{exact. 2 piques et 3 trèfles}) = \dfrac{C_8^2\, C_8^3}{C_{32}^5} = \dfrac{7}{899}$ $(\simeq 0{,}0078)$

3 pts (b) $p(\text{au moins 1 figure}) = 1 - p(\text{aucune figure})$

$$= 1 - \frac{C_{20}^5}{C_{32}^5} = \frac{11617}{12586} \quad (\simeq 0{,}9230)$$

3) 20 boules $\to$ 10 rouges, 6 vertes, 4 noires

3 pts (a) tirage avec remise : $p(3 \text{ rouges}) = \dfrac{10 \cdot 10 \cdot 10}{20 \cdot 20 \cdot 20} = \dfrac{1}{8}$ $(= 0{,}125)$

3 pts (b) tirage sans remise : $p(3 \text{ rouges}) = \dfrac{A_{10}^3}{A_{20}^3} = \dfrac{2}{19}$ $(\simeq 0{,}1053)$

3 pts 4) $A_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$