LE GOUVERNEMENT
DU GRAND-DUCHÉ DE LUXEMBOURG
Ministère de l'Éducation nationale,
de l'Enfance et de la Jeunesse

EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES
2017

BRANCHE	SECTION(S)	ÉPREUVE ÉCRITE
Mathématiques I	**B**	Corrigé

Question 1 [(8 + 4) + (2 + 3) = 17 points]

I. $P(z) = z^3 - \left(2\sqrt{3} - 4i\right) \cdot z^2 - (20 - 4\sqrt{3}\, i) \cdot z + 64i.$

a) $P(bi) = 0 \Leftrightarrow (bi)^3 - \left(2\sqrt{3} - 4i\right)(bi)^2 - \left(20 - 4\sqrt{3}\, i\right) \cdot bi + 64i = 0$ avec $b \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow -b^3 i + 2\sqrt{3}b^2 - 4b^2 i - 20bi - 4\sqrt{3}b + 64i = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{3}b^2 - 4\sqrt{3}b = 0 & (E1) \\ -b^3 - 4b^2 - 20b + 64 = 0 & (E2) \end{cases}$$

$(E1) \Leftrightarrow b = 0$ ou $b = 2$. Notons que $b = 0$ n'est pas solution de $(E2)$.

D'où : $P(2i) = 0$ et $P(z)$ est divisible par $z - 2i$.

	1	$-2\sqrt{3} + 4i$	$-20 + 4\sqrt{3}\, i$	$64i$
$2i$		$2i$	$-12 - 4\sqrt{3}\, i$	$-64i$
	1	$-2\sqrt{3} + 6i$	-32	0

$P(z) = 0 \Leftrightarrow z = 2i$ ou $z^2 + \left(-2\sqrt{3} + 6i\right)z - 32 = 0 \quad (*)$

Résoudre $(*)$: $\Delta = \left(-2\sqrt{3} + 6i\right)^2 + 4 \cdot 32 = 104 - 24\sqrt{3}\, i.$

Soit $u = x + iy$ une racine carrée complexe de Δ, avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$u^2 = \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 104 & (1) \\ 2xy = -24\sqrt{3} & (2) \\ x^2 + y^2 = 112 & (3) \end{cases}$$

$(1) + (3) \Leftrightarrow 2x^2 = 216 \Leftrightarrow x = \pm 6\sqrt{3}$

$(3) - (1) \Leftrightarrow 2y^2 = 8 \Leftrightarrow y = \pm 2$

En tenant compte de l'équation (2) les RCC de Δ sont $6\sqrt{3} - 2i$ et $-6\sqrt{3} + 2i$ et les solutions de $(*)$ seront :

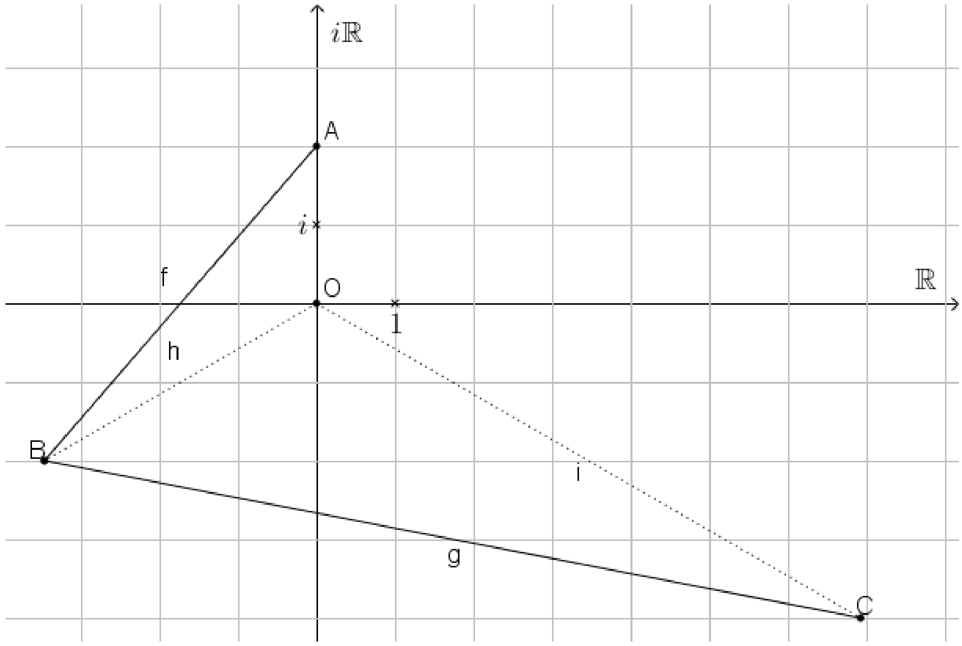
$z_1 = \frac{2\sqrt{3} - 6i + 6\sqrt{3} - 2i}{2} = 4\sqrt{3} - 4i$ et $z_2 = \frac{2\sqrt{3} - 6i - 6\sqrt{3} + 2i}{2} = -2\sqrt{3} - 2i$

Finalement : $S = \left\{2i,\ 4\sqrt{3} - 4i, -2\sqrt{3} - 2i\right\}$

b) $A(2i)$

$B\left(-2\sqrt{3} - 2i\right)$ avec $Re(z_B) < 0$

$C(4\sqrt{3}-4i)$



$z_A = 2i = 2 \cdot cis\left(\frac{\pi}{2}\right)$

$|z_B| = 4$ et $z_B = 4 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = 4 \cdot cis\left(\frac{7\pi}{6}\right)$

$|z_C| = 8$ et $z_C = 8 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = 8 \cdot cis\left(\frac{11\pi}{6}\right) = 8 \cdot cis\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

$\frac{z_B}{z_A} = \frac{4 \cdot cis\left(\frac{7\pi}{6}\right)}{2 \cdot cis\left(\frac{\pi}{2}\right)} = 2 \cdot cis\left(\frac{7\pi}{6} - \frac{\pi}{2}\right) = 2 \cdot cis\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

$\frac{z_C}{z_B} = \frac{8 \cdot cis\left(\frac{11\pi}{6}\right)}{4 \cdot cis\left(\frac{7\pi}{6}\right)} = 2 \cdot cis\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

Donc $B = s(A)$ et $C = s(B)$, et $s([AB]) = [BC]$ avec s similitude de centre O, de rapport 2 et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ $(\mathrm{mod}\ 2\pi)$.

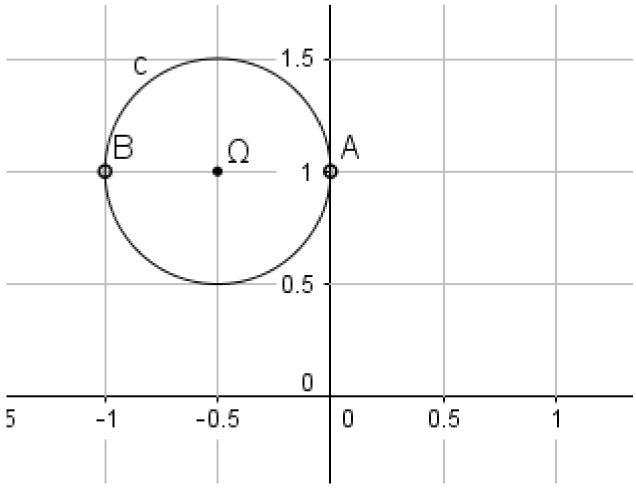
II. Soit $Z = \frac{\bar{z}+i}{\bar{z}+1+i}$ avec $z \neq -1+i$.

a) En posant $z = x + iy$, Z devient :

$$Z = \frac{x-iy+i}{x-iy+1+i} = \frac{x+i(1-y)}{(x+1)+i(1-y)} \cdot \frac{(x+1)-i(1-y)}{(x+1)-i(1-y)} = \frac{x^2+x+(1-y)^2}{(x+1)^2+(1-y)^2} + i\,\frac{1-y}{(x+1)^2+(1-y)^2}$$

b) $Z \in i\mathbb{R}^* \Leftrightarrow y \neq 1$ et $x^2 + x + (1-y)^2 = 0$

$\Leftrightarrow y \neq 1$ et $\underbrace{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + (y-1)^2 = \frac{1}{4}}_{\text{Equation du cercle } C \text{ de centre } \Omega\left(-\frac{1}{2};1\right) \text{ et de rayon } \frac{1}{2}}$ Comme $A(0;1) \in C$ et $B(-1;1) \in C$, $\mathbb{E} = C \setminus \{A,B\}$.



Question 2 [5 + (5 + 6) = 16 points]

I. Soit $\Gamma \equiv y = -2\sqrt{-x^2 + x}$.

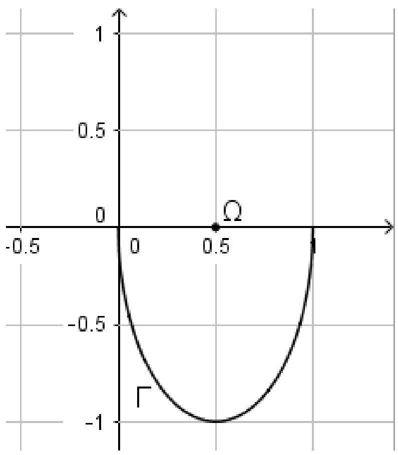
Conditions d'existence : $y \leq 0$ et $-x^2 + x \geq 0 \Leftrightarrow x \in [0; 1]$

$\forall y \leq 0, \forall x \in [0; 1]$:

$y^2 = 4(-x^2 + x)$

$\Leftrightarrow 4\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) + y^2 = 1$

$\Leftrightarrow \frac{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2}{\frac{1}{4}} + y^2 = 1$ Equation d'une demi-ellipse de centre $\Omega\left(\frac{1}{2}; 0\right)$ et d'axe focal $(\Omega, \vec{j})$.



II. Soit $\Gamma \equiv 10x^2 - y^2 - 40x - 2y = -48$ $(*)$

a) $10x^2 - y^2 - 40x - 2y = -48$

$\Leftrightarrow 10(x^2 - 4x + 4) - (y^2 + 2y + 1) = -48 + 40 - 1$

$\Leftrightarrow 10(x - 2)^2 - (y + 1)^2 = -9$

$$\Leftrightarrow \frac{(y+1)^2}{9} - \frac{(x-2)^2}{\frac{9}{10}} = 1$$

Γ est donc une hyperbole de centre $\Omega(2;-1)$ et d'axe focal $(\Omega,\vec{j})$.

$a = \frac{3\sqrt{10}}{10}$, $b = 3$, $c = 3\sqrt{\frac{11}{10}} = \frac{3\sqrt{110}}{10}$, excentricité $e = \sqrt{\frac{11}{10}}$

Posons $\begin{cases} X = x-2 \\ Y = y+1 \end{cases}$

	Dans $(\Omega,\vec{i},\vec{j})$	Dans $(O,\vec{i},\vec{j})$
Sommets	$S(0;3)$ et $S'(0;-3)$	$S(2;2)$ et $S'(2;-4)$
Foyers	$F\left(0;3\sqrt{\frac{11}{10}}\right)$ et $F'\left(0;-3\sqrt{\frac{11}{10}}\right)$	$F\left(2;-1+3\sqrt{\frac{11}{10}}\right)$ et $F'\left(2;-1-3\sqrt{\frac{11}{10}}\right)$
Directrices	$d \equiv Y = 3\sqrt{\frac{10}{11}}$ et $d' \equiv Y = -3\sqrt{\frac{10}{11}}$	$d \equiv y = 3\sqrt{\frac{10}{11}} - 1$ et $d' \equiv y = -3\sqrt{\frac{10}{11}} - 1$
Asymptotes	$A_1 \equiv Y = \sqrt{10}X$ $A_2 \equiv Y = -\sqrt{10}X$	$A_1 \equiv y = \sqrt{10}x - 2\sqrt{10} - 1$ $A_2 \equiv y = -\sqrt{10}x + 2\sqrt{10} - 1$

b) Soit $d \equiv y = \frac{7}{20}x + 1$, soit t une tangente à Γ. $t \perp d \Leftrightarrow t \equiv y = -\frac{20}{7}x + \lambda$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Déterminons $\Gamma \cap t$: remplacer $y = -\frac{20}{7}x + \lambda$ dans $(*)$

$$10x^2 - \left(-\frac{20}{7}x + \lambda\right)^2 - 40x - 2\left(-\frac{20}{7}x + \lambda\right) = -48$$

$$\Leftrightarrow 10x^2 - \frac{400}{49}x^2 + \frac{40}{7}\lambda x - \lambda^2 - 40x + \frac{40}{7}x - 2\lambda + 48 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{90}{49}x^2 + \left(\frac{40}{7}\lambda - \frac{240}{7}\right)x - \lambda^2 - 2\lambda + 48 = 0$$

t est tangente à Γ si et seulement si $\Delta = 0$

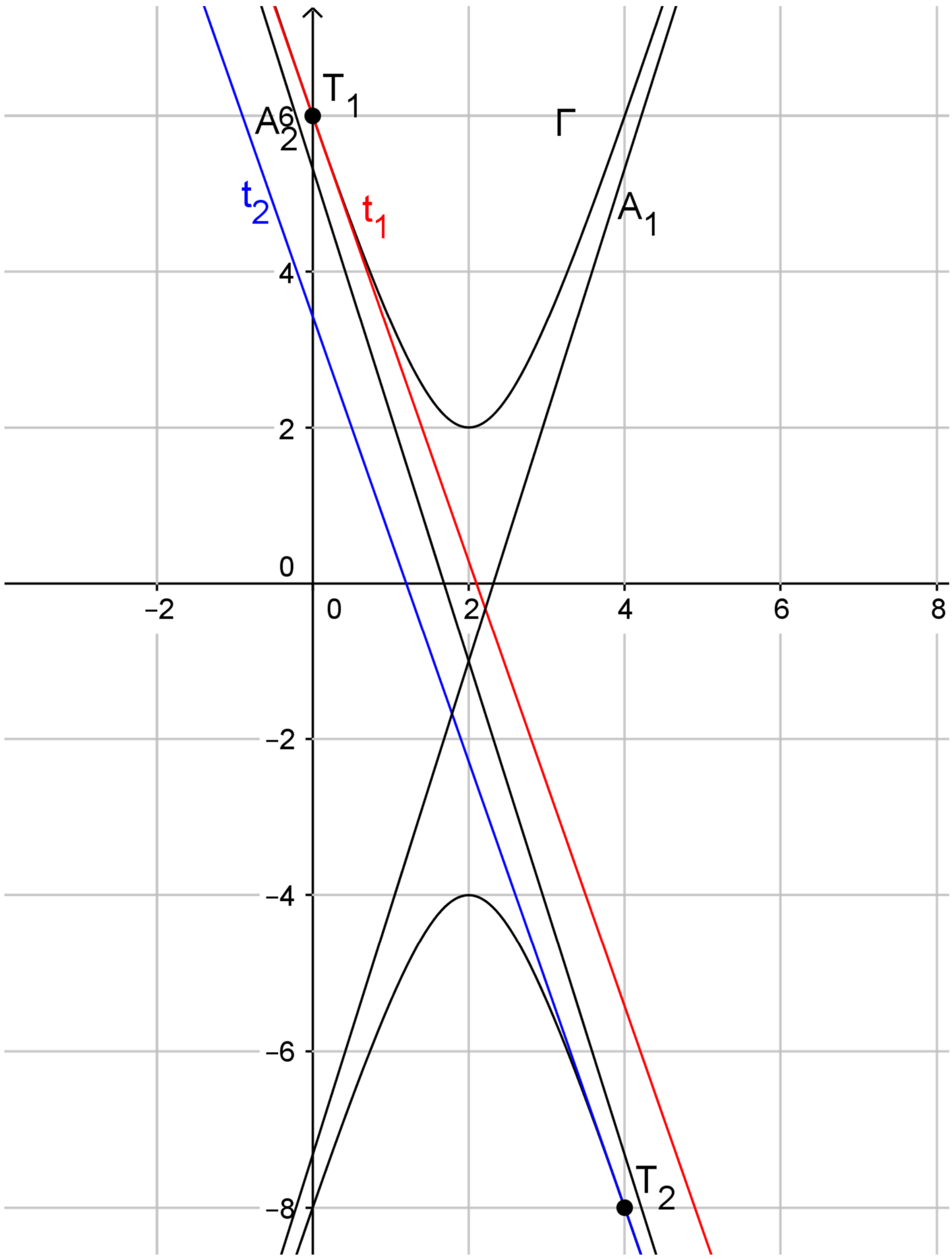
$$\Leftrightarrow \left(\frac{40}{7}\lambda - \frac{240}{7}\right)^2 + 4 \cdot \frac{90}{49} \cdot (\lambda^2 + 2\lambda - 48) = 0$$

$$\Leftrightarrow 40\lambda^2 - \frac{2640}{7}\lambda + \frac{5760}{7} = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda = 6 \text{ ou } \lambda = \frac{24}{7}$$

D'où: $t_1 \equiv y = -\frac{20}{7}x + 6$ point de contact $T_1(0;6)$

$t_2 \equiv y = -\frac{20}{7}x + \frac{24}{7}$ point de contact $T_2(4;-8)$


T
1
A
2
6
Γ
t
2
t
1
A
1
4
2
0
−2
0
2
4
6
8
−2
−4
−6
−8
T
2

Question 3 [(1 + 3 + 1) + 3 + (3 + 4) = 15 points]

I. 15 jetons numérotés : 5 bleus (B), 3 verts (V) et 7 rouges (R).

Tirages successifs sans remise : $\#\Omega = A_{15}^{4}$=32760

a) Soit A l'événement « tirer 3R et 1V ».

$\#A = C_4^1 \cdot A_7^3 \cdot A_3^1 = 2520$

b) Soit B l'événement « tirer exactement 2 jetons de même couleur ».

$$\#B = \underbrace{C_4^2 \cdot A_5^2 \cdot A_3^1 \cdot A_7^1 \cdot 2!}_{2B\ 1V\ 1R} + \underbrace{C_4^2 \cdot A_3^2 \cdot A_5^1 \cdot A_7^1 \cdot 2!}_{2V\ 1B\ 1R} + \underbrace{C_4^2 \cdot A_7^2 \cdot A_5^1 \cdot A_3^1 \cdot 2!}_{2R\ 1B\ 1V} = 15120$$

$$= \left(C_5^2 \cdot C_3^1 \cdot C_7^1 + C_3^2 \cdot C_5^1 \cdot C_7^1 + C_7^2 \cdot C_5^1 \cdot C_3^1\right) \cdot 4!$$

c) Soit C l'événement « tirer trois couleurs différentes ».

$$p(C) = p(B) = \frac{15120}{32760} = \frac{6}{13} \approx 0{,}46$$

II. A montrer : $\sum_{j=k}^{n} C_j^k = C_{n+1}^{k+1}$ $(*)$ avec $k \in \mathbb{N}$ fixé

Conditions d'existence : $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq k$

Si $n = k$, alors $(*)$ devient $\sum_{j=k}^{k} C_j^k = C_k^k = 1 = C_{k+1}^{k+1}$.

Supposons donc la formule $\sum_{j=k}^{i} C_j^k = C_{i+1}^{k+1}$ vraie pour tout $i \in \mathbb{N}$ avec $i \leq n$ (Hypothèse de récurrence HR) et démontrons qu'elle reste vraie si $i = n + 1$.

$$\sum_{j=k}^{n+1} C_j^k = \sum_{j=k}^{n} C_j^k + C_{n+1}^k \overset{\text{HR}}{=} C_{n+1}^{k+1} + C_{n+1}^k \underbrace{=}_{\text{Triangle de Pascal}} C_{n+2}^{k+1}$$

III. 3 cartes tirées simultanément $\#\Omega = C_{16}^3 = 560$

a) Soit A l'événement « tirer deux cartes de même couleur ».

$\#A = 4 \cdot C_4^2 \cdot C_{12}^1 = 288$ et $p(A) = \frac{288}{560} = \frac{18}{35} \approx 0{,}51$

Soit B l'événement « tirer au moins deux cartes de même couleur ». Alors $\bar{B}$ désigne l'événement « tirer 3 couleurs différentes ».

$\#B = \#\Omega - \#\bar{B}$ avec $\#\bar{B} = C_4^3 4^3 = 256$ et $p(B) = 1 - p(\bar{B}) = 1 - \frac{256}{560} = \frac{19}{35} \approx 0{,}54$

b) Soit X la variable aléatoire comptant le nombre de cœurs tirés. Il s'agit d'une expérience de Bernoulli car on répète n expériences indépendantes sous des conditions identiques (n tirages avec remise). X suit donc une loi binomiale de paramètres $p = \frac{1}{4}$ et n et $p(X = \ ) = C_n^i \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^i \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-i}$ avec $i \in \{0,1,2,\dots,n\}$

$p(X \geq 1) > 0{,}95 \Leftrightarrow 1 - P(X = 0) > 0{,}95$

$\Leftrightarrow 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n > 0{,}95$

$\Leftrightarrow n > \underbrace{\log_{\frac{3}{4}}(0{,}05)}_{\approx 10{,}41}$

Il faut donc effectuer au moins 11 tirages successifs.

Question 4 [5 + 7 = 12 points]

I. On donne la courbe $\Gamma \equiv \begin{cases} x = 3 \cdot \cos^2 t \\ y = 4 \cdot \sin(2t) \end{cases}$, avec $t \in [-\pi; \pi]$.

a) Si $M(t) = (3\cos^2 t\,; 4\sin(2t))$, alors $M(-t) = (3\cos^2 t\,; -4\sin(2t)) = s_{(Ox)}\big(M(t)\big)$ et Γ est symétrique par rapport à l'axe (Ox). Il suffit donc de l'étudier sur $[0\,; \pi]$.

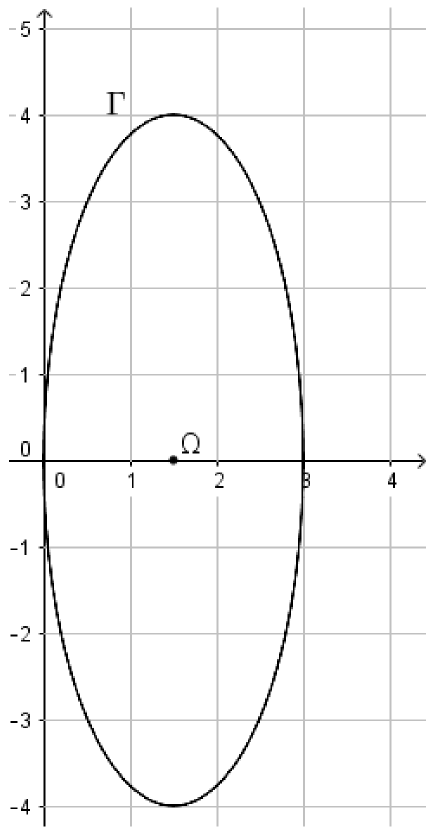
b) $x = 3\cos^2 t \Leftrightarrow x = 3 \cdot \frac{1}{2}(1 + \cos(2t)) \Leftrightarrow \frac{2}{3}x - 1 = \cos(2t)$.

$y = 4\sin(2t) \Leftrightarrow \frac{y}{4} = \sin(2t)$

D'où : $\left(\frac{2}{3}x - 1\right)^2 + \frac{y^2}{16} = 1 \Leftrightarrow \frac{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2}{\frac{9}{4}} + \frac{y^2}{16} = 1$

équation d'une ellipse de centre $\Omega\left(\frac{3}{2}; 0\right)$ et d'axe focal $(\Omega, \vec{j})$.

c)



II. Soient $\mathcal{E} \equiv \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1$ et les points $A(-7;0)$ et $B(7;0)$.

$P(x_P;y_P) \in \mathcal{E} \Leftrightarrow \frac{x_P^2}{36} + \frac{y_P^2}{9} = 1 \Leftrightarrow y_P = \pm\frac{1}{2}\sqrt{36 - x_P^2}$. Comme APB est non aplati, P ne peut pas être un des sommets du grand-axe de $\mathcal{E}$, c.à.d. $x_P \neq \pm 6$.

Soit $G(x;y)$ le centre de gravité du $\Delta(APB)$:

$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GP} = \vec{0}$ (ou bien utiliser $\overrightarrow{PG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{PM}$, avec $M = \text{mil}[AB]$)

$\Leftrightarrow G = \left(\frac{x_A + x_B + x_P}{3} ; \frac{y_A + y_B + y_P}{3}\right)$

$\Leftrightarrow G = \left(\frac{x_P}{3} ; \pm\frac{1}{6}\sqrt{36 - x_P^2}\right)$

D'où : $\begin{cases} 3x = x_P \\ y = \pm\frac{1}{6}\sqrt{36 - 9x^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = x_P \\ y = \pm\frac{1}{2}\sqrt{4 - x^2} \end{cases}$

Finalement $\mathbb{L} \equiv y = \pm\frac{1}{2}\sqrt{4 - x^2} \Leftrightarrow \mathbb{L} \equiv x^2 + 4y^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \mathbb{L} \equiv \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

Comme $x_P \neq \pm 6, x \neq \pm 2$ et $\mathbb{L}$ est l'ellipse de centre $O(0;0)$ dont on exclut les points $(-2;0)$ et $(2;0)$.