LE GOUVERNEMENT
DU GRAND-DUCHÉ DE LUXEMBOURG
Ministère de l'Éducation nationale,
de l'Enfance et de la Jeunesse

EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES 2017

BRANCHE	SECTION(S)	ÉPREUVE ÉCRITE
Mathématiques I	B	*Durée de l'épreuve* 3 heures
		Date de l'épreuve
		Numéro du candidat

Question 1 [(8 + 4) + (2 + 3) = 17 points]

I. On donne le polynôme $P(z) = z^3 - \left(2\sqrt{3} - 4i\right) \cdot z^2 - (20 - 4\sqrt{3}\, i) \cdot z + 64i$.

a) Résoudre l'équation $P(z) = 0$ sachant que le polynôme admet une racine imaginaire pure.

b) Soit A le point du plan de Gauss qui a pour affixe la racine imaginaire pure de P ; soient B et C les points qui ont comme affixes les autres racines de P, avec $Re(z_B) < 0$. Montrer que le segment $[BC]$ est l'image du segment $[AB]$ par une similitude (composée d'une homothétie suivie d'une rotation) de centre O dont on déterminera l'angle et le rapport.

II. On donne le nombre complexe $Z = \frac{\bar{z}+i}{\bar{z}+1+i}$ avec $z \neq -1 + i$.

a) En posant $z = x + iy$, écrire Z sous forme algébrique.

b) Déterminer et représenter l'ensemble $\mathbb{E} = \{M(z) \mid Z \in i\mathbb{R}^*\}$, dans un R.O.N. d'unité 2cm.

Question 2 [5 + (5 + 6) = 16 points]

I. Identifier la courbe d'équation $\Gamma \equiv y = -2\sqrt{-x^2 + x}$ et tracer Γ dans un repère orthonormé d'unité 2cm.

II. Dans un repère orthonormé du plan $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ on donne la conique

$$\Gamma \equiv 10x^2 - y^2 - 40x - 2y = -48.$$

a) Identifier Γ et donner ses éléments caractéristiques (centre, sommets, axe focal, foyers, directrices, asymptotes éventuelles, excentricité) dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

b) Déterminer une équation des tangentes éventuelles à Γ perpendiculaires à la droite d d'équation $y = \frac{7}{20}x + 1$. Tracer Γ ainsi que les tangentes trouvées dans un repère orthonormé d'unité 0,5 cm.

Question 3 [(1 + 3 + 1) + 3 + (3 + 4) = 15 points]

I. Dans une urne on a mis 15 jetons numérotés, dont 5 bleus, 3 verts et 7 rouges. On tire successivement, sans remise, 4 jetons de l'urne.

a) Combien y a-t-il de tirages comprenant 3 jetons rouges et un jeton vert?

b) Combien y a-t-il de tirages comprenant exactement deux jetons de même couleur ?

c) Déduire de b) la probabilité de tirer 4 jetons de 3 couleurs différentes.

II. Démontrer par récurrence sur n la formule suivante (k étant un naturel fixé), en précisant les conditions d'existence pour le naturel n :

$$\sum_{j=k}^{n} C_j^k = C_{n+1}^{k+1}$$

III. Un paquet de 16 cartes est constitué du Valet, de la Dame, du Roi et de l'As de chaque couleur c'est-à-dire trèfle, carreau, cœur et pique.

a) On tire simultanément 3 cartes au hasard.

- Quelle est la probabilité pour qu'exactement 2 des cartes tirées soient de la même couleur ?
- Quelle est la probabilité pour qu'au moins deux des cartes tirées soient de la même couleur ?

b) On tire maintenant une seule carte du paquet et on la remet dans le paquet après ce tirage. On effectue n tirages indépendants les uns des autres.
Combien de tirages doit-on effectuer pour que la probabilité d'avoir au moins un cœur soit supérieure à 95% ?

Question 4 [5 + 7 = 12 points]

I. On donne la courbe $\Gamma \equiv \begin{cases} x = 3 \cdot \cos^2 t \\ y = 4 \cdot \sin(2t) \end{cases}$, avec $t \in [-\pi; \pi]$.

a) Déterminer les éléments de symétrie éventuels de la courbe Γ et en déduire une réduction du domaine d'étude.

b) Déterminer une équation cartésienne de Γ et préciser la nature de Γ.

c) Représenter graphiquement Γ dans un repère orthonormé d'unité 1cm.

II. Dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ du plan on donne l'ellipse $\mathcal{E} \equiv \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1$ et les points $A(-7; 0)$ et $B(7; 0)$. Soit P un point mobile de $\mathcal{E}$. Déterminer et tracer le lieu géométrique $\mathbb{L}$ du centre de gravité du triangle non aplati ABP dans le même repère que l'ellipse $\mathcal{E}$ (unité 1 cm).