EFES - 2017 - B - Mathématiques II - Corrigé

I. a) $g : x \longmapsto x^2 - 2\ln x$

i. $dom\ g = \mathbb{R}_+^*$

$(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) \quad g'(x) = 2x - \dfrac{2}{x} = \dfrac{2(x^2-1)}{x}$

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$\|\| +\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$
			minimum		

ii. La fonction g admet un minimum absolu au point 1.

$g(1) = 1$

Par suite, comme g est continu sur $\mathbb{R}_+^*$ on a : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) \quad g(x) > 0$

b) $f : x \longmapsto \dfrac{1+\ln x}{x} + \dfrac{x}{2}$

i. $dom\ f = \mathbb{R}_+^*$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{\ln x}{x} + \dfrac{x}{2}\right) = +\infty \qquad [0+0+\infty]$

En effet : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} \qquad \left[\text{f.i. } \dfrac{\infty}{\infty}\right]$

$\underset{[H]}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty \qquad \left[\dfrac{-\infty}{0^+} + 0\right]$

A.V. : $x = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \left[f(x) - \dfrac{x}{2}\right] = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{\ln x}{x}\right) = 0$

A.O. : $y = \dfrac{x}{2}$

$dom\ f' = dom\ f$

$(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) \quad f'(x) = \dfrac{x \cdot \frac{1}{x} - (1+\ln x)}{x^2} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{-\ln x}{x^2} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{x^2 - 2\ln x}{2x^2} = \dfrac{g(x)}{2x^2}$

f' a le même signe que g, donc $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) \quad f'(x) > 0$

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

$dom\ f'' = dom\ f'$

$(\forall x \in dom\ f'') \quad f''(x) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{x^2\left(2x - \frac{2}{x}\right) - (x^2 - 2\ln x)\,2x}{x^4} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{-2 + 4\ln x}{x^3} = \dfrac{2\ln x - 1}{x^3}$

x		$\sqrt{e}$	
$f''(x)$	$-$	0	$+$
	$\frown$ $\downarrow$	infl.	$\uparrow$ $\smile$

Représentation graphique : voir page suivante

ii. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$

$f'(x) = \dfrac{1}{2} \iff \dfrac{x^2 - 2\ln x}{2x^2} = \dfrac{1}{2} \iff x^2 - 2\ln x = x^2 \iff \ln x = 0 \iff x = 1$

$\mathcal{C}_f$ admet une tangente parallèle à Δ au point $A\left(1; \dfrac{3}{2}\right)$.

$\Delta_1 : y = \dfrac{1}{2}(x-1) + \dfrac{3}{2} \iff y = \dfrac{1}{2}x + 1$

iii. $f(x) - \dfrac{x}{2} = 0 \iff \dfrac{1+\ln x}{x} = 0 \iff \ln x = -1 \iff x = e^{-1}$

$(\forall x \in \left]e^{-1}; +\infty\right[) \quad 1 + \ln x > 0$

Donc : $D_\lambda = \left\{M(x;y) \mid e^{-1} \leqslant x \leqslant \lambda \text{ et } \dfrac{x}{2} \leqslant y \leqslant f(x)\right\}$

$\mathcal{A}(D_\lambda) = \displaystyle\int_{e^{-1}}^{\lambda} \dfrac{1+\ln x}{x}dx = \int_{e^{-1}}^{\lambda} \left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{\ln x}{x}\right)dx = \left[\ln x + \dfrac{1}{2}\ln^2 x\right]_{e^{-1}}^{\lambda} = \ln\lambda + \dfrac{1}{2}\ln^2\lambda + \dfrac{1}{2}$ u.a.

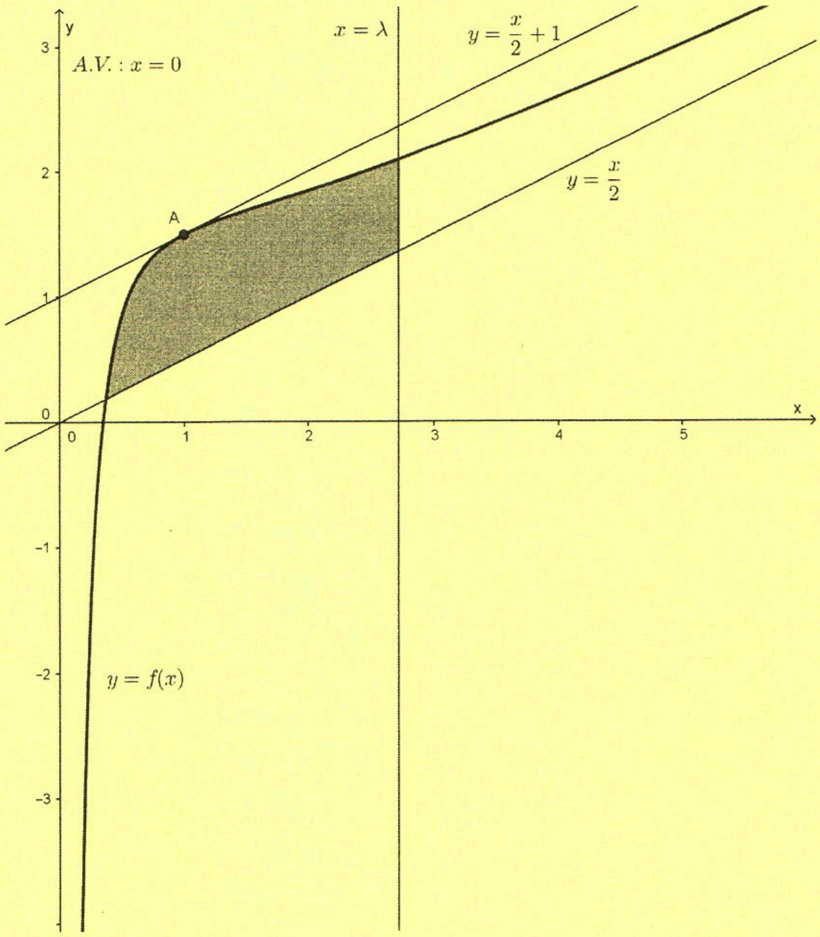


FIG. 1 – Rep. graph. de $f : x \longmapsto \dfrac{1 + \ln x}{x} + \dfrac{x}{2}$

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(D_\lambda) = 2 \iff \ln\lambda + \frac{1}{2}\ln^2\lambda + \frac{1}{2} = 2 &\iff \ln^2\lambda + 2\ln\lambda - 3 = 0 \qquad [\Delta' = 1 + 3 = 4] \\ &\iff \ln\lambda = -1 - 2 = -3 \text{ ou } \ln\lambda = -1 + 2 = 1 \\ &\iff \lambda = e^{-3} \text{ [à écarter car } \lambda > 1] \text{ ou } \lambda = e\end{aligned}$$

Donc : $\mathcal{A}(D_e) = 2$ u.a.

.... [(2+1)+(7+2+4)=16 points]

II. $f : x \longmapsto \begin{cases} e^{x-1} & \text{si} \quad x \leqslant 1 \\ b + a\ln x & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$

a) f est continu et dérivable sur $]-\infty; 1[$ et sur $]1; +\infty[$ quelles que soient les valeurs de a et de b.

étude au voisinage de 1

continuité

$f(1) = 1$

f est continu au point d'abscisse 1 $\iff \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 1 \iff b = 1$

Les fonctions $f : x \longmapsto \begin{cases} e^{x-1} & \text{si} \quad x \leqslant 1 \\ 1 + a\ln x & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$

sont continues sur $\mathbb{R}$

dérivabilité

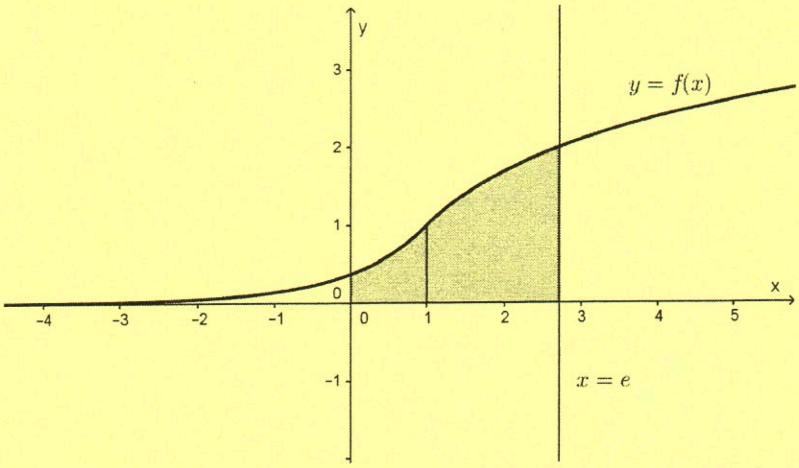
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x\to 1^-} \frac{e^{x-1} - 1}{x - 1} \qquad \left[\text{f.i. } \frac{0}{0}\right] \\ &\underset{[H]}{=} \lim_{x\to 1^-} e^{x-1} = 1 = f_g'(1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x\to 1^+} \frac{1 + a\ln x - 1}{x - 1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{a\ln x}{x - 1} \\ &= a \lim_{x\to 1^+} \frac{\ln x}{x - 1} \qquad \left[\text{f.i. } \frac{0}{0}\right] \\ &\underset{[H]}{=} a \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x} = a = f_d'(1)\end{aligned}$$

f est dérivable au point 1 si et seulement si $a = 1$ et $b = 1$

b) $a = 1\,;\, b = 1$

i.



ii. $D = D_1 \cup D_2$

où $D_1 = \left\{M(x,y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1 \text{ et } 0 \leqslant y \leqslant e^{x-1}\right\}$

$D_2 = \left\{M(x,y) \mid 1 \leqslant x \leqslant e \text{ et } 0 \leqslant y \leqslant 1 + \ln x\right\}$

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(D) &= \int_0^1 e^{x-1}dx + \int_1^e (1+\ln x)\,dx \\ &= \left[e^{x-1}\right]_0^1 + \left[x\ln x\right]_1^e \\ &= 1 - e^{-1} + e \approx 3,35 \text{ u.a.}\end{aligned}$$

Calcul de $\int (1+\ln x)\,dx$

i.p.p.	posons :	$u(x) = 1 + \ln x$	$v'(x) = 1$
	On a :	$u'(x) = \dfrac{1}{x}$	$v(x) = x$

$$\int (1+\ln x)\,dx = x(1+\ln x) - \int dx = x(1+\ln x) - x + k = x\ln x + k$$

iii. $$\begin{aligned}\mathcal{V} &= \pi\int_0^1 \left(e^{x-1}\right)^2 dx + \pi\int_1^e (1+\ln x)^2\,dx \\ &= \pi\int_0^1 e^{2x-2}dx + \pi\int_1^e \left(1 + 2\ln x + \ln^2 x\right)dx \\ &= \pi\left[\frac{1}{2}e^{2x-2}\right]_0^1 + \pi\int_1^e (1+2\ln x)\,dx + \pi\int_1^e \ln^2 x dx\end{aligned}$$

Calcul de $\int (1+2\ln x)\,dx$

i.p.p.	posons :	$u(x) = 1 + 2\ln x$	$v'(x) = 1$
	On a :	$u'(x) = \dfrac{2}{x}$	$v(x) = x$

$$\int (1+2\ln x)\,dx = x(1+2\ln x) - 2\int dx = x(1+2\ln x) - 2x + k = -x + 2x\ln x + k$$

$$\int_1^e (1+2\ln x)\,dx = \left[-x + 2x\ln x\right]_1^e = e + 1$$

Calcul de $\int \ln^2 x dx$

i.p.p.	posons :	$u(x) = \ln^2 x$	$v'(x) = 1$
	On a :	$u'(x) = 2\ln x \cdot \dfrac{1}{x}$	$v(x) = x$

$$\int \ln^2 x dx = x\ln^2 x - 2\int \ln x dx = +k$$

$$\int_1^e \ln^2 x dx = \left[x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x\right]_1^e = e - 2$$

$$V = \pi\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2}\right) + \pi(e+1) + \pi(e-2) = 2\pi e - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2e^2} \approx 15,3 \text{ u.v.}$$

.... [4+(2+3+5)=14 points]

III. a) $(m+2)\,3^x + (2m+3)\,3^{-x} - 2m = 0 \qquad (E_m)$

$(m+2)\,3^x + (2m+3)\,3^{-x} - 2m = 0 \qquad |\cdot 3^x \neq 0$

$\iff (m+2)\,3^{2x} - 2m\cdot 3^x + 2m + 3 = 0 \quad (E_m)$

Posons : $u = 3^x > 0$

$(E_m) \iff (m+2)\,u^2 - 2mu + 2m + 3 = 0 \qquad (E'_m)$

1^er^ cas : $m = -2$

$(E_{-2}) \iff 4u - 1 = 0 \iff u = \dfrac{1}{4} \iff 3^x = \dfrac{1}{4} \iff x = -\log_3 4$

(E_{-2}) admet une seule solution

2^e^ cas : $m \neq -2$

$\Delta_m = 4m^2 - 4\,(m+2)\,(2m+3) = -4m^2 - 28m - 24 = -4\left(m^2 + 7m + 6\right)$

$\delta = 7^2 - 4\cdot 6 = 25$

$\Delta_m = 0 \iff m = \dfrac{7-5}{-2} = -1$ ou $m = \dfrac{7+5}{-2} = -6$

$P_m = \dfrac{2m+3}{m+2}\,; \quad S_m = \dfrac{2m}{m+2}$

m	Δ	P_m	S_m	solutions de (E'_m)	solutions de (E_m)
$m \in \left]-\infty;-6\right[$	$-$	$+$	$+$	aucune solution	aucune solution
$m = -6$	0	$+$	$+$	une solution (double) strict. positive	une solution unique
$m \in \left]-6;-2\right[$	$+$	$+$	$+$	deux solutions strict. positives	deux solutions distinctes
$m = -2$		$\|$	$\|$	une solution stict. positive	une solution unique
$m \in \left]-2;-\frac{3}{2}\right[$	$+$	$-$	$-$	deux solutions de signes contraires	une solution unique
$m = -\frac{3}{2}$	$+$	0	$-$	deux solutions : 0 et une strict. négative	aucune solution
$m \in \left]-\frac{3}{2};-1\right[$	$+$	$+$	$-$	deux solutions strict. négatives	aucune solution
$m = -1$	0	$+$	$-$	une solution (double) strict. négative	aucune solution
$m \in \left]-1;0\right[$	$-$	$+$	$-$	aucune solution	aucune solution
$m = 0$	$-$	$+$	0	aucune solution	aucune solution
$m \in \left]0;+\infty\right[$	$-$	$+$	$+$	aucune solution	aucune solution

b) i. $(\log_3 x)^2 = 2\log_3 19683 + \log_3\left(x^3\right)$

$(\log_3 x)^2 - \log_3\left(x^3\right) - 2\log_3 19683 = 0 \qquad (E)$

C.E. : $\begin{cases} x > 0 \\ x^3 > 0 \end{cases} \iff x > 0$

Supposons : $x \in D = \mathbb{R}_+^*$.

$$\begin{aligned}(E) &\iff (\log_3 x)^2 - 3\log_3 x - 2\cdot\log_3\left(3^9\right) = 0\\ &\iff (\log_3 x)^2 - 3\log_3 x - 18 = 0 \qquad [\Delta = 9 + 4\cdot 18 = 81]\\ &\iff \log_3 x = \frac{3-9}{2} = -3 \text{ ou } \log_3 x = \frac{3+9}{2} = 6\\ &\iff x = 3^{-3} = \frac{1}{27} \in D \text{ ou } x = 3^6 = 729 \in D\end{aligned}$$

$S = \left\{\dfrac{1}{27}; 729\right\}$

ii. $\ln\left(2e^x - 5\right) > \ln\left(13e^{-x} - 30e^{-2x}\right) \qquad (I)$

C.E. : $\begin{cases} 2e^x - 5 > 0 & (1) \\ 13e^{-x} - 30e^{-2x} > 0 & (2) \end{cases}$

$(1) \iff e^x > \dfrac{5}{2} \iff x > \ln\dfrac{5}{2}$

$(2) \iff 13e^x - 30 > 0 \iff e^x > \dfrac{30}{13} \iff x > \ln\dfrac{30}{13}$

Supposons : $x \in D = \left]\ln\dfrac{5}{2}; +\infty\right[$

$(I) \iff 2e^x - 5 > 13e^{-x} - 30e^{-2x}$ [car ln est une bijection strictement croissante]

$\iff 2e^x - 5 - \dfrac{13}{e^x} + \dfrac{30}{e^{2x}} > 0 \quad |\cdot e^{2x} > 0$

$\iff 2e^{3x} - 5e^{2x} - 13e^x + 30 > 0$

Posons : $u = e^x$

$(I) \iff 2u^3 - 5u^2 - 13u + 30 > 0$

Posons : $p(u) = 2u^3 - 5u^2 - 13u + 30$

On a : $p(2)=0$ Horner :

	2	−5	−13	30
2		4	−2	−30
	2	−1	−15	0

$p(u)=(u-2)\left(2u^2-u-15\right)$

$2u^2-u-15=0 \qquad [\Delta=1+4\cdot 2\cdot 15=121]$

$\Longleftrightarrow u=\dfrac{1-11}{4}=-\dfrac{5}{2}$ ou $u=\dfrac{1+11}{4}=3$

$p(u)=2u^3-5u^2-13u+30=(u-2)(2u+5)(u-3)$

u		$-\frac{5}{2}$		2		3	
$u-2$	−		−	0	+		+
$2u^2-u-15$	+	0	−		−	0	+
$2u^3-5u^2-13u+30$	−	0	+	0	−	0	+

$(I)\Longleftrightarrow -\dfrac{5}{2}<u<2$ ou $u>3 \Longleftrightarrow -\dfrac{5}{2}<e^x<2$ ou $e^x>3 \Longleftrightarrow x<\ln 2$ ou $x>\ln 3$

$S=\left(]-\infty;\ln 2[\,\cup\,]\ln 3;+\infty[\right)\cap D=]\ln 3;+\infty[$

[6+(3+5)=14 points]

IV. a) $f: x\longmapsto \dfrac{1-2\ln x-2\ln^2 x}{x^2}$

dom $f=$ *dom* $f'=\mathbb{R}_+^*$

$$(\forall x\in dom\ f')\quad f'(x)=\frac{x^2\left(-\frac{2}{x}-\frac{4\ln x}{x}\right)-\left(1-2\ln x-2\ln^2 x\right)\cdot 2x}{x^4}$$
$$=\frac{-2x-4x\ln x-2x+4x\ln x+4x\ln^2 x}{x^4}$$
$$=\frac{4x\left(\ln^2 x-1\right)}{x^4}$$
$$=\frac{4\left(\ln^2 x-1\right)}{x^3}$$

équation de la tangente au point d'abscisse x_0 $\left(x_0\in\mathbb{R}_+^*\right)$

$\Delta_{x_0}: y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$

$O(0,0)\in\Delta_{x_0} \Longleftrightarrow 0-f(x_0)=f'(x_0)(0-x_0)$

$\Longleftrightarrow f(x_0)=x_0f'(x_0)$

$\Longleftrightarrow \dfrac{1-2\ln x_0-2\ln^2 x_0}{x_0^2}=4x_0\dfrac{\ln^2 x_0-1}{x_0^3} \qquad |\cdot x_0^2\neq 0$

$\Longleftrightarrow 1-2\ln x_0-2\ln^2 x_0=4\left(\ln^2 x_0-1\right)$

$\Longleftrightarrow 5-2\ln x_0-6\ln^2 x_0=0 \qquad$ [posons : $u=\ln x_0$]

$\Longleftrightarrow 6u^2+2u-5=0 \qquad [\Delta'=1+5\cdot 6=31]$

$\Longleftrightarrow u=\dfrac{-1-\sqrt{31}}{6}=u_1$ ou $u=\dfrac{-1+\sqrt{31}}{6}=u_2$

$\Longleftrightarrow x=e^{u_1}$ ou $x=e^{u2}$

Les points d'abscisses $e^{\frac{-1-\sqrt{31}}{6}}$ et $e^{\frac{-1+\sqrt{31}}{6}}$ de la courbe représentative de f admettent une tangente passant par l'origine.

b) i. $\displaystyle\int_1^{\pi}\sin(\ln x)\,dx=I$

i.p.p. posons : $u(x)=\sin(\ln x)$ $\quad v'(x)=1$

On a : $u'(x)=\cos(\ln x)\dfrac{1}{x}$ $\quad v(x)=x$

$I=[x\sin(\ln x)]_1^{\pi}-\displaystyle\int_1^{\pi}\cos(\ln x)\,dx$

i.p.p. posons : $u_1(x)=\cos(\ln x)$ $\quad v_1'(x)=1$

On a : $u_1'(x)=-\sin(\ln x)\dfrac{1}{x}$ $\quad v_1(x)=x$

$\displaystyle\int_1^{\pi}\cos(\ln x)\,dx=[x\cos(\ln x)]_1^{\pi}+I$

D'où : $I=[x\sin(\ln x)]_1^{\pi}-[x\cos(\ln x)]_1^{\pi}-I$

$\Longleftrightarrow 2I=\pi\sin(\ln\pi)-\pi\cos(\ln\pi)+1$

$\Longleftrightarrow I=\dfrac{\pi}{2}\sin(\ln\pi)-\dfrac{\pi}{2}\cos(\ln\pi)+\dfrac{1}{2}$

ii. $\displaystyle\int_0^1 x\,(1-x)^{2017}\,dx = I$

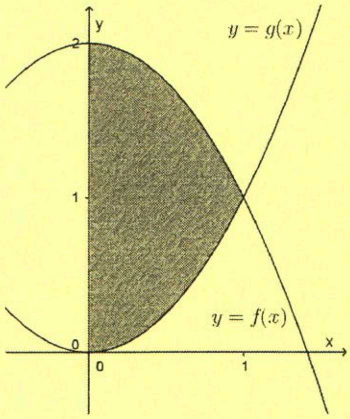
posons : $u = 1 - x \Longleftrightarrow x = 1 - u$

$\dfrac{du}{dx} = -1 \qquad x = 0 \Longrightarrow u = 1$

$\qquad\qquad\quad x = 1 \Longrightarrow u = 0$

$$I = -\int_1^0 (1-u)\,u^{2017}du = \int_0^1 \left(u^{2017} - u^{2018}\right) du = \left[\frac{u^{2018}}{2018} - \frac{u^{2019}}{2019}\right]_0^1 = \frac{1}{2018} - \frac{1}{2019} = \frac{1}{4074\,342}$$

c) $D = \{M\,(x;y) \in \Pi \mid x \geqslant 0 \text{ et } y \geqslant 0 \text{ et } g\,(x) \leqslant y \leqslant f(x)\}$



$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f(x) = g\,(x) \Longleftrightarrow x = -1 \text{ ou } x = 1$

$(\forall x \in [0;1])\;(\forall y \in [0;2]) \qquad y = f(x) \Longleftrightarrow y = 2 - x^2 \Longleftrightarrow x = \sqrt{2-y}$

$\qquad y = g\,(x) \Longleftrightarrow y = x^2 \Longleftrightarrow x = \sqrt{y}$

$$\mathcal{V}\,(D) = \pi\int_0^1 y dy + \pi\int_1^2 (2-y)\,dy = \pi\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1 + \pi\left[2y - \frac{y^2}{2}\right]_1^2 = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi \quad \text{u.v.}$$

.... [5+(4+3)+4=16 points]