

$$I) 1) z = \frac{(1+i)(\sqrt{3}+i)}{1+i\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}+i+\sqrt{3}i-1}{1+i\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}-1+(\sqrt{3}+1)i}{1+i\sqrt{3}} \cdot \frac{1-i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}-1+(-3+\sqrt{3}+\sqrt{3}+1)i+3+\sqrt{3}}{1+3} = \frac{2\sqrt{3}+2+(2\sqrt{3}-2)i}{4}$$

$$z = \frac{\sqrt{3}+1}{2} + \frac{\sqrt{3}-1}{2}i$$

$$2) z_1 = 1+i \quad |z_1| = \sqrt{2}$$

$$\left. \begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \varphi &= \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4} (2\pi)$$

$$z_1 = \sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{\pi}{4}$$

$$z_2 = \sqrt{3}+i \quad |z_2| = 2$$

$$\left. \begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \varphi &= \frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{6} (2\pi)$$

$$z_2 = 2 \operatorname{cis} \frac{\pi}{6}$$

$$z_3 = 1+i\sqrt{3} \quad |z_3| = 2$$

$$\left. \begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{1}{2} \\ \sin \varphi &= \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{3} (2\pi)$$

$$z_3 = 2 \operatorname{cis} \frac{\pi}{3}$$

$$z = \frac{\sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{\pi}{4} \cdot 2 \operatorname{cis} \frac{\pi}{6}}{2 \operatorname{cis} \frac{\pi}{3}} = \sqrt{2} \operatorname{cis} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} \right) = \sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{\pi}{12}$$

$$3) \text{ racines cubiques de } z: z_k = \sqrt[6]{2} \operatorname{cis} \left(\frac{\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3} \right), k \in \{0, 1, 2\}$$

$$z_0 = \sqrt[6]{2} \operatorname{cis} \frac{\pi}{36}, \quad z_1 = \sqrt[6]{2} \operatorname{cis} \left(\frac{\pi}{36} + \frac{24\pi}{36} \right) = \sqrt[6]{2} \operatorname{cis} \frac{25\pi}{36},$$

$$z_2 = \sqrt[6]{2} \operatorname{cis} \left(\frac{\pi}{36} + \frac{48\pi}{36} \right) = \sqrt[6]{2} \operatorname{cis} \frac{49\pi}{36}$$

$$II) P(z) = 2z^3 + 3z^2 + (12+7i)z + 26-8i$$

$$P(bi) = -2b^3i - 3b^2 + 12bi - 7b + 26 - 8i = -3b^2 - 7b + 26 + (-2b^3 + 12b - 8)i$$

$$P(bi) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -3b^2 - 7b + 26 = 0 & (1) \\ -2b^3 + 12b - 8 = 0 & (2) \end{cases} \quad \Delta = 49 + 312 = 361$$

$$b_i = \frac{7 \pm 19}{-6} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{12}{6} \\ 2 \end{cases}$$

$b=2$ dans (2): $-16 + 24 - 8 = 0$

$\Rightarrow 2i$ est une racine de P .

$2i$	2	3	$12+7i$	$26-8i$
	$4i$	$-8+6i$	$-26+8i$	
	2	$3+4i$	$4+13i$	0

$$P(z) = (2-2i) [2z^2 + (3+4i)z + 4+13i]$$

$$\Delta = (3+4i)^2 - 8(4+13i) = 9+24i-16-32-104i = -39-80i$$

pos: $t = a+bi$ racine carrée de Δ

$$\Leftrightarrow (a+bi)^2 = -39-80i$$

$$\Leftrightarrow a^2 - b^2 + 2abi = -39-80i$$

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 89 & (1) \\ a^2 - b^2 = -39 & (2) \\ ab < 0 & (3) \end{cases}$$

$$(1)+(2): 2a^2 = 50 \Leftrightarrow a^2 = 25 \Leftrightarrow a = \pm 5$$

$$(1)-(2): 2b^2 = 128 \Leftrightarrow b^2 = 64 \Leftrightarrow b = \pm 8$$

D'après (3): $t_1 = 5-8i \quad t_2 = -5+8i$

$$z_1 = \frac{-3-4i+5-8i}{4} = \frac{2-12i}{4} = \frac{1}{2}-3i \quad z_2 = \frac{-3-4i-5+8i}{4} = \frac{-8+4i}{4} = -2+i$$

$$S = \left\{ 2i; \frac{1}{2}-3i; -2+i \right\}$$

III) 1) $M(x, y, z) \in \Pi \Leftrightarrow \vec{AM}, \vec{AB}, \vec{AC}$ sont coplanaires

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-2 & 1 & -2 \\ y-1 & -1 & 1 \\ z & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2) + z - 4(y-1) - 2z - 2(x-2) + (y-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow -(x-2) - 3(y-1) - z = 0 \quad | \cdot (-1)$$

$$\Leftrightarrow x - 2 + 3y - 3 + z = 0$$

$$\Leftrightarrow x + 3y + z - 5 = 0 \quad \text{éq. cart. de } \Pi$$

2) $\vec{n} = \text{vect. normal à } \Pi = \text{vect. dir. de } d \quad \vec{n}(1, 3, 1)$

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{1} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(x-2) = y-1 \\ x-2 = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y - 5 = 0 \\ x - z - 2 = 0 \end{cases} \begin{array}{l} \text{sys. d'éq.} \\ \text{cart. de } d \end{array}$$

3) éq. cart. de Π' : $x + 3y + z + d = 0$

$$D(3, -4, -8) \in \Pi' \Leftrightarrow 3 - 12 - 8 + d = 0 \Leftrightarrow d = 17$$

$$\text{éq. cart. de } \Pi': x + 3y + z + 17 = 0$$

$$\text{IV) 1) } \begin{cases} 2x + my + 4z = 2m \\ x + (m-1)y + mz = m \\ x + y + 3z = 2 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & m & 4 \\ 1 & m-1 & m \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 6(m-1) + m^2 + 4 - 4(m-1) - 2m - 3m \\ = 6m - 6 + m^2 + 4 - 4m + 4 - 2m - 3m \\ = m^2 - 3m + 2 \\ \Delta = 9 - 8 = 1 \quad m_i = \frac{3 \pm 1}{2} \rightarrow 2, 1$$

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow m = 1 \text{ ou } m = 2$$

Le système admet une solution unique si $m \in \mathbb{R} - \{1; 2\}$.

2) • $m = 1$

$$\begin{cases} 2x + y + 4z = 2 & (1) \\ x + z = 1 & (2) \\ x + y + 3z = 2 & (3) \end{cases}$$

(2) $\Rightarrow x = 1 - z$

Dans (1): $2 - 2z + y + 4z = 2$
 $y + 2z = 0 \leftarrow$

Dans (3): $1 - z + y + 3z = 2$
 $y + 2z = 1 \leftarrow$ impossible

$S = \emptyset$

Les 3 plans n'ont pas de point commun.

• $m = 2$

$$\begin{cases} 2x + 2y + 4z = 4 & | : 2 & (P_1) \\ x + y + 2z = 2 & (P_2) \\ x + y + 3z = 2 & (P_3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 2z = 2 \leftarrow \\ x + y + 2z = 2 \leftarrow \\ x + y + 3z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 2z = 2 & (1) \\ x + y + 3z = 2 & (2) \end{cases}$$

(2) - (1): $z = 0$

Dans (1): $x + y = 2 \Rightarrow x = 2 - y$ pos: $y = \lambda$

$$\begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{cases}$$

$S = \{(2 - \lambda, \lambda, 0) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$

Les 3 plans se coupent suivant une droite passant par le point A(2,0,0) et de vect. dir. $\vec{u}(-1, 1, 0)$. P_1 et P_2 sont confondus.

$$\begin{aligned} \text{VII) 1) } (2x^2 - \frac{1}{4x})^8 &= \sum_{k=0}^8 C_8^k (2x^2)^{8-k} \cdot (-\frac{1}{4x})^k \\ &= \sum_{k=0}^8 C_8^k 2^{8-k} x^{16-2k} (-1)^k 2^{-2k} x^{-k} \\ &= \sum_{k=0}^8 C_8^k 2^{8-3k} (-1)^k x^{16-3k} \end{aligned}$$

Cond: $16 - 3k = 7 \Leftrightarrow -3k = -9 \Leftrightarrow k = 3$

terme en x^7 : $C_8^3 2^{-1} \cdot (-1)^3 x^7 = -\frac{56}{2} x^7 = -28 x^7$

2) nombre de cas possibles = $C_{32}^5 = 201'376$

a) A = obtenir exactement 2 carreaux et exactement 2 coeurs.

nombre de cas favorables = $C_8^2 \cdot C_8^2 \cdot C_{16}^1 = 28 \cdot 28 \cdot 16 = 12544$

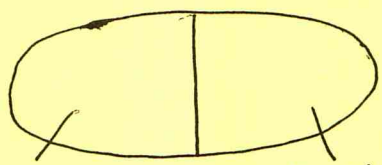
$P(A) = \frac{12544}{201'376} = \frac{56}{899} \approx 0,062$

b) B = obtenir au moins un roi ou au moins un cœur

\bar{B} = n'obtenir ni roi, ni cœur

$$P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - \frac{C_{21}^5}{C_{32}^5} = 1 - \frac{20349}{201376} = 1 - \frac{2907}{28768} = \frac{25861}{28768} \approx 0,899$$

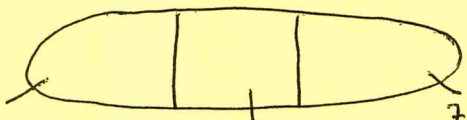
3) a)



7 élèves sans Carole, sans Nadine 7 élèves avec Carole, avec Nadine

$$\begin{aligned} \text{nombre de groupes} &= C_{14}^7 + C_{14}^5 = 3432 + 2002 \\ &= 5434 \end{aligned}$$

b)



7 élèves avec Pierre, sans Jean 7 élèves avec Jean, sans Pierre 7 élèves sans Jean, sans Pierre

$$\begin{aligned} \text{nombre de groupes} &= C_{14}^6 + C_{14}^6 + C_{14}^7 \\ &= 3003 + 3003 + 3432 = 9438 \end{aligned}$$

ou: $C_{16}^7 - C_{14}^5 = 11440 - 2002 = 9438$

4) nombre de mots = $C_{21}^3 \cdot C_5^2 \cdot 5! = 1330 \cdot 10 \cdot 120 = 1'596'000$

ou: $C_5^3 \cdot A_{21}^3 \cdot A_5^2 = 10 \cdot 7980 \cdot 20 = 1'596'000$