Corrigé

I. 1. a. $P(z)=0 \Leftrightarrow z^2-8z+25=0 \quad \Delta=-36=(6i)^2$

$\Leftrightarrow z=\frac{8+6i}{2}$ ou $z=\frac{8-6i}{2}$

2pts. Racines de P : $z=4+3i$ et $z=4-3i$

b. Poser : $z^2=t$

Alors : $Q(z)=0 \Leftrightarrow t^2-8t+25=0$

$\Leftrightarrow P(t)=0$

1pt. $\Leftrightarrow t=4+3i$ ou $t=4-3i$

- Soit $z=a+bi$ une racine carrée de $4+3i$.

  Alors: $\begin{cases} a^2+b^2=\sqrt{16+9}=5 & (1)\\ 2ab=3 & (2)\\ a^2-b^2=4 & (3)\end{cases}$

  (1) + (3): $2a^2=9 \Leftrightarrow a=\frac{3}{\sqrt{2}}$ ou $a=-\frac{3}{\sqrt{2}}$

  (1) – (3): $2b^2=1 \Leftrightarrow b=\frac{1}{\sqrt{2}}$ ou $b=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

  D'après (2), a et b ont même signe

  4pts. D'où, les R.C. de $4+3i$ sont: $\frac{3\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $-\frac{3\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$

- Soit $z=a+bi$ une racine carrée de $4-3i$.

  Alors: $a=\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ou $a=-\frac{3\sqrt{2}}{2}$

  $b=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $b=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

  et a et b sont de signes contraires

  2pts. D'où, les R.C. de $4-3i$ sont: $\frac{3\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $-\frac{3\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$

1pt. Donc: $S=\{\frac{3\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2};\ -\frac{3\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{3\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{3\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\}$

c. Soit bi la racine imaginaire pure de R. Alors:

$R(bi)=0 \Leftrightarrow -ib^3+(8+i\sqrt{3})b^2+(25+i8\sqrt{3})\cdot ib-i25\sqrt{3}=0$

$\Leftrightarrow -ib^3+8b^2+i\sqrt{3}b^2+i\cdot 25b-8\sqrt{3}b-i25\sqrt{3}=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 8b^2-8\sqrt{3}b=0 & (1)\\ -b^3+\sqrt{3}b^2+25b-25\sqrt{3}=0 & (2)\end{cases}$

(1) $\Leftrightarrow 8b(b-\sqrt{3})=0 \Leftrightarrow b=0$ ou $b=\sqrt{3}$

$b=\sqrt{3}$ dans (2): $-3\sqrt{3}+\sqrt{3}\cdot 3+25\sqrt{3}-25\sqrt{3}=0$

3pts. Donc, $i\sqrt{3}$ est une racine imaginaire pure de R: $R(z)=(z-i\sqrt{3})\cdot T(z)$

Horner:

	1	$-8-i\sqrt{3}$	$25+i\cdot 8\sqrt{3}$	$-i\cdot 25\sqrt{3}$
$i\sqrt{3}$		$i\sqrt{3}$	$-i\cdot 8\sqrt{3}$	$i\cdot 25\sqrt{3}$
	1	-8	25	0

3pts. D'où: $T(z)=z^2-8z+25=P(z)$

1pt. Finalement: $R(z)=(z-i\sqrt{3})(z-4-3i)(z-4+3i)$

2pts. 2. a. $z_1 = \frac{i}{2i\sqrt{3}-2} \cdot \frac{\mathbf{2i\sqrt{3}+2}}{\mathbf{2i\sqrt{3}+2}} = \frac{-2\sqrt{3}+2i}{-12-4} = \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{1}{8}i$

1pt. $z_2 = \frac{1-i\sqrt{3}}{2i} \cdot \frac{i}{i} = \frac{\sqrt{3}+i}{-2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

b. On a: $|z_2| = \sqrt{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}} = 1$

$$\left.\begin{array}{l}\cos\varphi_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\varphi_2 = -\frac{1}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow \varphi_2 = -\frac{5\pi}{6} + k\cdot 2\pi,\ \ k\in\mathbb{Z}$$

2pts. $\Rightarrow\ z_2 = cis\,(-\frac{5\pi}{6})$

et: $z_3 = \sqrt{2}\left(-\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$

1pt. $= \sqrt{2}(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin(-\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}\,cis\,\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

Alors:

2pts. $Z = \frac{\sqrt{2}^6\,cis(-\frac{6\pi}{4})}{cis(-\frac{5\pi}{6})} = 8cis\left(-\frac{3\pi}{2}+\frac{5\pi}{6}\right) = 8cis\left(-\frac{4\pi}{6}\right) = 8cis\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$

3. On a: $|z| = \sqrt{1+3} = 2$

$$\left.\begin{array}{l}\cos\varphi = -\frac{1}{2}\\ \sin\varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{3} + k\cdot 2\pi,\ \ k\in\mathbb{Z}$$

2pts. $\Rightarrow\ z = 2cis\,(-\frac{2\pi}{3})$

Racines quatrièmes de z: $z_k = \sqrt[4]{2}\,cis\frac{-\frac{2\pi}{3}+k\cdot 2\pi}{4},\ k\in\mathbb{Z}$

1pt. $= \sqrt[4]{2}\,cis\left(-\frac{\pi}{6}+k\cdot\frac{\pi}{2}\right),\ k\in\mathbb{Z}$

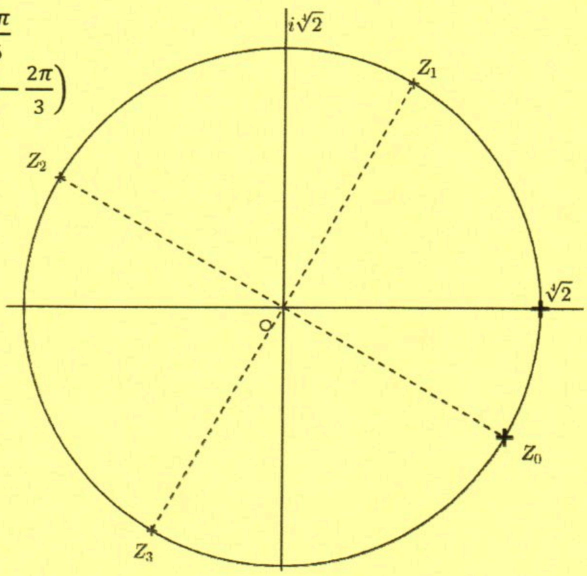
$\Rightarrow$ $z_0 = \sqrt[4]{2}\,cis\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

$z_1 = \sqrt[4]{2}\,cis\frac{\pi}{3}$

$z_2 = \sqrt[4]{2}\,cis\frac{5\pi}{6}$

2pts. $z_3 = \sqrt[4]{2}\,cis\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$

2pts.



II. 1. a. $\det A = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{3} & -1 \\ 4 & 3 & m \\ 2m & 1 & -m \end{vmatrix} = \frac{2}{3}m^2 + \frac{10}{3}m - 4$

$\det A = 0 \Leftrightarrow 2(m^2 + 5m - 6) = 0 \qquad \Delta = 25 - 4\cdot 1\cdot(-6) = 49$

$\Leftrightarrow m = \frac{-5-7}{2}$ ou $m = \frac{-5+7}{2}$

$\Leftrightarrow m = -6$ ou $m = 1$

4pts. Donc: (*) admet une solution unique $\Leftrightarrow m \in \mathbb{R} \setminus \{-6; 1\}$

b. Si $m = 1$, alors: (*) $\begin{cases} x + \frac{y}{3} - z = -\frac{2}{3} & (1) \\ 4x + 3y + z = 4 & (2) \\ 2x + y - z = 0 & (3) \end{cases}$

(1) + (2): $5x + \frac{10}{3}y = \frac{10}{3} \Leftrightarrow 15x + 10y = 10 \Leftrightarrow 3x + 2y = 2$

(2) + (3): $6x + 4y = 4 \Leftrightarrow 3x + 2y = 2$

Le système est simplement indéterminé:

pour $x = \alpha$: $2y = 2 - 3\alpha \Leftrightarrow y = 1 - \frac{3}{2}\alpha$

dans (3): $z = 2\alpha + 1 - \frac{3}{2}\alpha = 1 + \frac{1}{2}\alpha$

5pts. Donc: $S = \left\{\left(\alpha;\ 1 - \frac{3}{2}\alpha;\ 1 + \frac{1}{2}\alpha \middle| \alpha \in \mathbb{R}\right)\right\}$

2pts. *Interprétation géométrique:*

Les équations du système représentent trois plans qui se coupent suivant une droite, passant par le point P(0; 1; 1) et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

2. (**) $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \sqrt{6}y - 2\sqrt{3}z = \sqrt{2} & |\cdot(-\sqrt{3}) \\ -2\sqrt{3}x + 3\sqrt{2}y + 6z = -2 & \\ \sqrt{3}x - \frac{3\sqrt{2}}{2}y - 3z = 1 & |\cdot(-2) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -2\sqrt{3}x + \sqrt{18}y + 2\cdot 3z = -\sqrt{6} \\ -2\sqrt{3}x + 3\sqrt{2}y + 6z = -2 \\ -2\sqrt{3}x + 3\sqrt{2}y + 6z = -2 \end{cases}$

3pts. $\Leftrightarrow \begin{cases} -2\sqrt{3}x + 3\sqrt{2}y + 6z = -\sqrt{6} & (\pi_1) \\ -2\sqrt{3}x + 3\sqrt{2}y + 6z = -2 & (\pi_2) \\ -2\sqrt{3}x + 3\sqrt{2}y + 6z = -2 & (\pi_3) \end{cases}$

1pt. Le système est impossible: S= $\emptyset$

1pt. *Interprétation géométrique:*

Les équations du système représentent trois plans et il n'y a aucun point commun aux trois plans.

III. 1. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $d = (AB)$.

1pt.

$$
\begin{aligned}
M(x;y;z)\in d &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \text{ et } \overrightarrow{AB} \text{ sont colinéaires}\\
&\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = k\cdot\overrightarrow{AB},\ k\in\mathbb{R}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x-1=k \\ y+2=k, \quad k\in\mathbb{R} \\ z=3k \end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x=1+k \\ y=-2+k, \quad k\in\mathbb{R} \\ z=3k \end{cases} \qquad \textit{équations paramétriques de } d
\end{aligned}
$$

2pts.

1pt. 2. $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de π et $\overrightarrow{AB}$ n'est pas colinéaire à $\vec{u}$

$$
\begin{aligned}
M(x;y;z)\in\pi &\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB},\vec{u})=0\\
&\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 1 \\ y+2 & 1 & -2 \\ z & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0\\
&\Leftrightarrow 5x+4y-3z+3=0 \qquad \textit{équation cartésienne de } \pi
\end{aligned}
$$

2pts.

1pt. 3. $\vec{n}\begin{pmatrix}5\\4\\-3\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à π

1pt. $d' \perp \pi \Rightarrow \vec{n}$ est un vecteur directeur de d'

$$
\begin{aligned}
M(x;y;z)\in d' &\Leftrightarrow \overrightarrow{CM} \text{ et } \vec{n} \text{ sont colinéaires}\\
&\Leftrightarrow \overrightarrow{CM} = k\cdot\vec{n},\ k\in\mathbb{R}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x=5k & (1) \\ y-1=4k & (2), \quad k\in\mathbb{R} \\ z+2=-3k & (3) \end{cases}
\end{aligned}
$$

2pts.

De (1): $k=\frac{x}{5}$

dans (2): $y-1=4\cdot\frac{x}{5} \Leftrightarrow \frac{4}{5}x-y+1=0$

dans(3): $z+2=-3\cdot\frac{x}{5} \Leftrightarrow -\frac{3}{5}x-z-2=0$

2pts. D'où: $\begin{cases} 4x-5z+5=0 \\ 3x+5z+10=0 \end{cases}$ *équations cartésiennes de d'*