



BRANCHE	SECTION	ÉPREUVE ÉCRITE
MATHÉMATIQUES I	B	Durée de l'épreuve 3 heures
		Date de l'épreuve 15 septembre 2017
		Numéro du candidat

Question I (1+6+3)+4=14 points

1) Soit le polynôme

$$P(z) = z^3 - (m + i + 2mi)z^2 + (-2m + mi + 2m^2i)z + 2m^2, \text{ m étant un paramètre réel non nul.}$$

- Montrer que i est une racine de P .
- Déterminer les autres racines de P .
- Soit A le point d'affixe i ,

B le point d'affixe l'autre racine imaginaire pure trouvée et

C le point d'affixe la 3^e racine trouvée.

Déterminer par calcul le paramètre m pour que le triangle ABC soit rectangle en C .

2) Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que $|z - 3| = \frac{\sqrt{2}}{2}|z - 5|$.

Représenter cet ensemble dans le plan de Gauss.

(Remarque : on note $|Z|$ le module du nombre complexe Z .)

Question II 5+(3+2+2+5)=17 points

1) Soit P une parabole de foyer F et de directrice d .

Soit M un point de la parabole et H le projeté orthogonal (voir (*) page 2) de M sur la directrice d .

Démontrer que la tangente à la parabole en M est la médiatrice du segment $[FH]$.

2) On suppose que le plan est muni d'un repère orthonormé $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$.

- Déterminer une équation réduite de l'hyperbole \mathbb{H} de foyers $F(5;1)$ et $F'(-1;1)$ et dont un sommet est le point $S(3;1)$.
- Déterminer l'excentricité, des équations des directrices et des équations des asymptotes obliques dans le repère R .
- Représenter l'hyperbole \mathbb{H} dans le repère R .
- Déterminer des équations des tangentes à \mathbb{H} perpendiculaires à la droite $\delta \equiv y = \frac{1}{4}x$ dans le repère R .

Question III (2+5)+(3+1)+(2+4)=17 points

- 1) Un professeur de mathématiques veut entraîner ses élèves à l'Olympiade Mathématique et rédige un questionnaire comportant 6 questions à choix multiple : pour chaque question il propose 5 réponses (A, B, C, D ou E), une seule d'entre elles est exacte. Un élève doit répondre à toutes les questions.
- a) On suppose qu'un élève répond au hasard aux 6 questions.
- 1°) Calculer la probabilité que l'élève n'ait aucune réponse exacte.
 - 2°) Calculer la probabilité que l'élève ait exactement deux réponses exactes.
 - 3°) Calculer la probabilité que l'élève réponde correctement aux questions n° 1, 2 et 3 et donne de fausses réponses aux autres questions.
- b) Le professeur distribue ce questionnaire à ses 25 élèves qui, malheureusement, répondent tous au hasard aux questions. On désigne par X la variable aléatoire qui donne le nombre d'élèves qui n'ont fourni aucune réponse exacte.
- 1°) Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale et préciser les paramètres.
 - 2°) Calculer la probabilité qu'au plus un élève n'ait donné que des réponses fausses.
 - 3°) Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire.
- 2) On considère le jeu suivant :
- Un joueur lance un dé non truqué. S'il obtient 1, 2 ou 3, il gagne l'équivalent en euros (c.-à-d. 1€ s'il obtient 1 p.ex.). Sinon il relance le dé. S'il obtient alors 1, 2 ou 3, il gagne 3€ sinon il perd 5€.
- a) Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X qui désigne le gain du joueur.
- b) Est-ce que le jeu est favorable au joueur ?
- 3) Dans un jeu de 32 cartes, on tire simultanément 3 cartes.
- a) Quelle est la probabilité d'obtenir au moins 2 cartes de même valeur ?
- b) Quelle est la probabilité d'obtenir exactement un valet ou exactement 2 trèfles ?

Question IV 12 points

Dans un repère orthonormé $R = (\vec{O}, \vec{i}, \vec{j})$, on donne deux points fixes $A(1,0)$ et $B(0,2)$. Pour un point quelconque $P(x_0, y_0)$, on note U , V et W les projetés orthogonaux (voir (*) en bas de page) de P sur les droites (OA) , (OB) et (AB) respectivement. Soit \mathcal{IL} le lieu des points P du plan tels que les points U , V et W sont alignés.

- a) Sans calculs, montrer que O , A et B appartiennent à \mathcal{IL} .
- b) Déterminer une équation cartésienne de \mathcal{IL} dans le repère R , puis dessiner-le.

(*) Le projeté orthogonal d'un point M sur une droite d est le pied de la perpendiculaire à d passant par M .