EXAMEN DE FIN D'ETUDES SECONDAIRES 2017
MATHEMATIQUES I
SECTION C

Corrigé

Question I ((2 + 10) + (4 + 2) = 18 points)

1) $p(z) = 2z^3 - (7-4i)z^2 + (13-25i)z + 12 + 21i$

a) Montrons que $p(-3i) = 0$. *2 pts*

$$\begin{aligned} p(-3i) &= 2(-27)(-i) - (7-4i)(-9) + (13-25i)(-3i) + 12 + 21i \\ &= 54i + 63 - 36i - 39i - 75 + 12 + 21i \\ &= 0 \end{aligned}$$

b) Comme $-3i$ est une racine de $p(z)$, $p(z)$ est divisible par $z + 3i$. *2 pts*

Schéma de Horner :

	2	$-7+4i$	$13-25i$	$12+21i$
$-3i$		$-6i$	$-6+21i$	$-12-21i$
	2	$-7-2i$	$7-4i$	0

Donc $p(z) = (z+3i)\underbrace{\left[2z^2 - (7+2i)z + 7 - 4i\right]}_{q(z)}$.

Racines de $q(z)$: *3 pts*

$\Delta = (7+2i)^2 - 8(7-4i) = 49 + 28i - 4 - 56 + 32i = -11 + 60i$

Racines carrées complexes de Δ :

$\delta = a + bi$ est une r.c.c. de $\Delta \Leftrightarrow (a+bi)^2 = -11 + 60i$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = -11 & (1) \\ 2ab = 60 & (2) \\ a^2 + b^2 = \sqrt{3721} = 61 & (3) \end{cases}$$

$(3)+(1)$: $2a^2 = 50 \Leftrightarrow a^2 = 25 \Leftrightarrow a = 5$ ou $a = -5$ *3 pts*

$(3)-(1)$: $2b^2 = 72 \Leftrightarrow b^2 = 36 \Leftrightarrow b = 6$ ou $b = -6$

Comme d'après (2) a et b sont de même signe, les r.c.c. de Δ sont $\delta_1 = 5 + 6i$ et $\delta_2 = -5 - 6i$.

Racines de $q(z)$: $z_1 = \dfrac{7+2i+5+6i}{4} = 3 + 2i$ *2 pts*

$z_2 = \dfrac{7+2i-5-6i}{4} = \dfrac{1}{2} - i$

Ensemble de solutions de l'équation $p(z) = 0$: $S = \left\{-3i, 3+2i, \dfrac{1}{2} - i\right\}$

2) $z=(2-3i)^2-\dfrac{17(3+i)}{i-4}+\dfrac{3+2i}{i}$

a) Forme algébrique : $\boxed{2{,}5\ pts}$

$$z=(2-3i)^2-\frac{17(3+i)}{i-4}+\frac{3+2i}{i}=4-12i-9-\frac{17(3+i)(i+4)}{(i-4)(i+4)}+\frac{(3+2i)i}{i^2}$$
$$=-5-12i-\frac{17(3i+12-1+4i)}{-1-16}-3i+2$$
$$=-3-15i+7i+11$$
$$=8-8i$$

Forme trigonométrique : $\boxed{1{,}5\ pts}$

$|z|=\sqrt{64+64}=8\sqrt{2}$

$$\left.\begin{array}{l}\cos\varphi=\dfrac{8}{8\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\varphi=-\dfrac{8}{8\sqrt{2}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow\ \varphi=-\frac{\pi}{4}+2k\pi\quad(k\in\mathbb{Z})$$

D'où : $z=8\sqrt{2}\operatorname{cis}\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$

b) Racines cubiques de z : $\boxed{2\ pts}$

$$z_k=\sqrt[3]{8\sqrt{2}}\operatorname{cis}\frac{-\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3}=2\sqrt[6]{2}\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3}\right)\quad(k\in\{0;1;2\})$$

D'où : $z_0=2\sqrt[6]{2}\operatorname{cis}\left(-\dfrac{\pi}{12}\right)$

$$z_1=2\sqrt[6]{2}\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi}{3}\right)=2\sqrt[6]{2}\operatorname{cis}\frac{7\pi}{12}$$

$$z_2=2\sqrt[6]{2}\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{12}+\frac{4\pi}{3}\right)=2\sqrt[6]{2}\operatorname{cis}\frac{15\pi}{12}=2\sqrt[6]{2}\operatorname{cis}\frac{5\pi}{4}$$

Question II ((3 + 9) + (4 + 4 + 2) = 22 points)

1) $\begin{cases}mx-y+(m+1)z=0\\(m+2)x-my+3z=1\\2x+z=m\end{cases}\quad(m\in\mathbb{R})$

a) $\Delta=\begin{vmatrix}m&-1&m+1\\m+2&-m&3\\2&0&1\end{vmatrix}=-m^2-6+2m(m+1)+m+2$ $\boxed{3\ pts}$

$$=-m^2-6+2m^2+2m+m+2$$
$$=m^2+3m-4$$

$\Delta=0\Leftrightarrow m^2+3m-4=0\Leftrightarrow m=1$ ou $m=-4$

Le système admet une solution unique $\forall m\in\mathbb{R}\setminus\{-4;1\}$.

b) Si $m=-4$ le système s'écrit : $\boxed{3{,}5\ pts}$

$$\begin{cases} -4x - y - 3z = 0 & (1) \\ -2x + 4y + 3z = 1 & (2) \\ 2x + z = -4 & (3) \end{cases}$$

$$\Updownarrow \ 4\cdot(1)+(2)\to(2')$$

$$\begin{cases} -4x - y - 3z = 0 & (1) \\ -18x - 9z = 1 & (2') \\ 2x + z = -4 & (3) \end{cases}$$

$$\Updownarrow \ (2')+9\cdot(3)\to(3')$$

$$\begin{cases} -4x - y - 3z = 0 & (1) \\ -18x - 9z = 1 & (2') \\ 0 = -35 & (3') \end{cases}$$

Système impossible : $S = \varnothing$

Interprétation géométrique

Les équations du système représentent trois plans qui n'ont aucun point commun.

Si $m = 1$ le système s'écrit : $\boxed{5{,}5 \text{ pts}}$

$$\begin{cases} x - y + 2z = 0 & (1) \\ 3x - y + 3z = 1 & (2) \\ 2x + z = 1 & (3) \end{cases}$$

$$\Updownarrow \ (1)-(2)\to(2')$$

$$\begin{cases} x - y + 2z = 0 & (1) \\ -2x - z = -1 & (2') \\ 2x + z = 1 & (3) \end{cases}$$

$$\Updownarrow \ (2')+(3)\to(3')$$

$$\begin{cases} x - y + 2z = 0 & (1) \\ -2x - z = -1 & (2') \\ 0 = 0 & (3') \end{cases}$$

Système simplement indéterminé

Posons $x = \alpha$.

Dans (3) : $z = -2\alpha + 1$

Dans (1) : $\alpha - y - 4\alpha + 2 = 0 \Leftrightarrow y = -3\alpha + 2$

D'où : $S = \left\{ (\alpha; -3\alpha + 2; -2\alpha + 1) \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}$

Interprétation géométrique

Les équations du système représentent trois plans qui se coupent en la droite d de vecteur directeur $\vec{u}(1;-3;-2)$ et passant par le point $A(0;2;1)$.

2) $A(-2;-6;0)$, $B(1;2;7)$, $C(3;0;-3)$, $P(0;2;-4)$

a) $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont des vecteurs directeurs du plan π. **4 pts**

$$M(x;y;z)\in\pi \Leftrightarrow \overrightarrow{PM}=k\overrightarrow{AB}+h\overrightarrow{AC} \quad (k,h\in\mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow \text{dét}\left(\overrightarrow{PM},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & 3 & 5 \\ y-2 & 8 & 6 \\ z+4 & 7 & -3 \end{vmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow -24x+35(y-2)+18(z+4)-40(z+4)-42x+9(y-2)=0$$

$$\Leftrightarrow -66x+44(y-2)-22(z+4)=0$$

$$\Leftrightarrow 3x-2(y-2)+(z+4)=0$$

$$\Leftrightarrow 3x-2y+z+8=0$$

b) $M(x;y;z)\in(PC)\Leftrightarrow \overrightarrow{PM}=k\overrightarrow{PC} \quad (k\in\mathbb{R})$ **4 pts**

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=3k \\ y-2=-2k \\ z+4=k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=3z+12 \\ y-2=-2z-8 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-3z-12=0 \\ y+2z+6=0 \end{cases}$$

c) Vecteur directeur de la droite (PC) : $\overrightarrow{PC}(3;-2;1)$ **2 pts**

Vecteur normal au plan (ABC) : $\vec{n}(3;-2;1)$

Comme $\overrightarrow{PC}=\vec{n}$, $(PC)\perp(ABC)$.

<u>Question III</u> (4 + (3 + 2 + 3) + (2 + 2 + 4) = <u>20 points</u>)

1) $$\left(2x^5-\frac{5}{x^3}\right)^{10}=\sum_{k=0}^{10}(-1)^k C_{10}^k\left(2x^5\right)^{10-k}\left(\frac{5}{x^3}\right)^k$$ **4 pts**

$$=\sum_{k=0}^{10}(-1)^k C_{10}^k\cdot 2^{10-k}\cdot x^{50-5k}\cdot 5^k\cdot x^{-3k}$$

$$=\sum_{k=0}^{10}(-1)^k C_{10}^k\cdot 2^{10-k}\cdot 5^k\cdot x^{50-8k}$$

Comme $50-8k=18\Leftrightarrow k=4$, le terme en x^{18} est :

$$(-1)^4 C_{10}^4\cdot 2^6\cdot 5^4\cdot x^{18}=210\cdot 64\cdot 625\cdot x^{18}=8400000x^{18}$$

2) Nombre de possibilités pour choisir 3 passagers parmi 20 (tirages sans ordre et sans remise) : $C_{20}^3=1140$ **1 pt**

a) Soit A l'événement « les 3 passagers ont 3 destinations différentes ».

Alors $p(A)=\dfrac{C_9^1\cdot C_6^1\cdot C_5^1}{1140}=\dfrac{9\cdot 6\cdot 5}{1140}=\dfrac{270}{1140}=\dfrac{9}{38}\simeq 0{,}237$. **2 pts**

b) Soit B l'événement « les 3 passagers ont la même destination ».

Alors $p(B)=\dfrac{C_9^3+C_6^3+C_5^3}{1140}=\dfrac{84+20+10}{1140}=\dfrac{114}{1140}=\dfrac{1}{10}=0{,}1$. $\boxed{2\ pts}$

c) Soit C l'événement « au moins un des passagers a un billet pour Mersch ».

Alors $\overline{C}$ est l'événement contraire « aucun passager n'a un billet pour Mersch ».

Et $p(C)=1-p\left(\overline{C}\right)=1-\dfrac{C_{15}^3}{1140}=1-\dfrac{455}{1140}=1-\dfrac{91}{228}=\dfrac{137}{228}\simeq 0{,}601$. $\boxed{3\ pts}$

3) Tirages avec ordre et sans remise

a) Nombre de mots ayant quatre lettres distinctes : $A_6^4=360$ $\boxed{2\ pts}$

b) Nombre de mots ayant quatre lettres distinctes et commençant par une consonne : $4\cdot A_5^3=4\cdot 60=240$ $\boxed{2\ pts}$

c) Nombre de mots comportant une seule fois la lettre A :

$$\underbrace{C_4^1\cdot A_5^3}_{\text{mots avec 4 lettres distinctes}}+\underbrace{C_4^1\cdot C_3^2\cdot A_4^1}_{\text{mots avec 2 S}}=4\cdot 60+4\cdot 3\cdot 4=240+48=288$$ $\boxed{4\ pts}$