Examen de fin d'études secondaires 2017

Section D   Mathématiques I   Corrigé

EXERCICE 1 :

1) $\dfrac{-4-4\sqrt{3}\,i}{2i}+\dfrac{13-11i}{3-i}=\dfrac{-4-4\sqrt{3}\,i}{2i}\cdot\dfrac{i}{i}+\dfrac{13-11i}{3-i}\cdot\dfrac{3+i}{3+i}=\dfrac{-4i+4\sqrt{3}}{-2}+\dfrac{39+13i-33i+11}{9+1}$ **3P**

$=-2\sqrt{3}+2i+\dfrac{50}{10}-\dfrac{20}{10}i=\underbrace{5-2\sqrt{3}}_{\in\mathbb{R}}$

2a)

$z_1=-4-4\sqrt{3}\cdot i=r_1\cdot cis\,\varphi_1$
où $r_1=\sqrt{16+16\cdot 3}=\sqrt{64}=8$

et $\left.\begin{array}{l}\cos\varphi_1=\dfrac{-4}{8}=\dfrac{-1}{2}\\ \sin\varphi_1=\dfrac{-4\sqrt{3}}{8}=\dfrac{-\sqrt{3}}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow \varphi_1=\dfrac{-2\pi}{3}+k\cdot 2\pi \qquad k\in\mathbb{Z}$ **1,5P**

donc $\underline{z_1=8\cdot\text{cis}\left(\dfrac{-2\pi}{3}\right)}$

Recherchons les racines cubiques de $z_1=8\cdot\text{cis}\left(\dfrac{-2\pi}{3}\right)$

$u=r\cdot\text{cis}(\theta)$ est une racine cubique de $8\cdot\text{cis}\left(\dfrac{-2\pi}{3}\right)\Leftrightarrow r=\sqrt[3]{8}=2$ et $\theta=\dfrac{-2\pi}{9}+k\cdot\dfrac{2\pi}{3}$ où $k\in\mathbb{Z}$

On obtient trois racines distinctes :

$\underline{u_0=2\cdot\text{cis}\left(\dfrac{-2\pi}{9}\right)}$, $\quad u_1=2\cdot\text{cis}\left(\dfrac{-2\pi}{9}+\dfrac{2\pi}{3}\right)=2\cdot\text{cis}\left(\dfrac{-2\pi}{9}+\dfrac{6\pi}{9}\right)=\underline{2\cdot\text{cis}\left(\dfrac{4\pi}{9}\right)}$ et

$u_2=2\cdot\text{cis}\left(\dfrac{-2\pi}{9}+\dfrac{4\pi}{3}\right)=2\cdot\text{cis}\left(\dfrac{-2\pi}{9}+\dfrac{12\pi}{9}\right)=2\cdot\text{cis}\left(\dfrac{10\pi}{9}\right)=\underline{2\cdot\text{cis}\left(\dfrac{-8\pi}{9}\right)}$ **3,5P**

2b)

$z_2=\sqrt{2}-\sqrt{2}\cdot i=r_2\cdot cis\,\varphi_2$
où $r_2=\sqrt{2+2}=2$

et $\left.\begin{array}{l}\cos\varphi_2=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\varphi_2=\dfrac{-\sqrt{2}}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow \varphi_2=\dfrac{-\pi}{4}+k\cdot 2\pi \qquad k\in\mathbb{Z}$ **1,5P**

donc $\underline{z_2=2\cdot\text{cis}\left(\dfrac{-\pi}{4}\right)}$

$$z=\frac{(z_1)^4}{(z_2)^6}=\frac{\left[8\cdot\text{cis}\left(\frac{-2\pi}{3}\right)\right]^4}{\left[2\cdot\text{cis}\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right]^6}=\frac{8^4\cdot\text{cis}\left(\frac{-8\pi}{3}\right)}{2^6\cdot\text{cis}\left(\frac{-6\pi}{4}\right)}=\frac{\left(2^3\right)^4}{2^6}\cdot\text{cis}\left(\frac{-8\pi}{3}+\frac{6\pi}{4}\right)=2^6\cdot\text{cis}\left(\frac{-8\pi}{3}+\frac{3\pi}{2}\right)$$

$$=64\cdot\text{cis}\left(\frac{-16\pi}{6}+\frac{9\pi}{6}\right)=64\cdot\text{cis}\left(\frac{-7\pi}{6}\right)=\underbrace{64\cdot\text{cis}\left(\frac{5\pi}{6}\right)}_{\text{forme trigon.}}=64\cdot\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}+i\cdot\frac{1}{2}\right)=\underbrace{-32\sqrt{3}+32i}_{\text{forme alg.}}$$ **4+0,5P**

EXERCICE 2 :

$a \in \mathbb{R}$ est une solution réelle de $\underbrace{z^3 + (-7+3i)\cdot z^2 + (10-17i)\cdot z + 6 + 24i}_{P(z)} = 0$ (1)

$\Leftrightarrow a^3 + (-7+3i)\cdot a^2 + (10-17i)\cdot a + 6 + 24i = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a^3 - 7a^2 + 10\cdot a + 6 = 0 & (2) \\ 3a^2 - 17a + 24 = 0 & (3) \end{cases}$ $\Delta = 289 - 12\cdot 24 = 1$ $a = \frac{17-1}{6} = \frac{8}{3}$ ou $a = \frac{17+1}{6} = 3$

$a = 3$ dans (2) $3^3 - 7\cdot 3^2 + 10\cdot 3 + 6 = 27 - 63 + 30 + 6 = 0$. Donc $\underline{3 \text{ est une solution de (1)}}$. 3P

$P(z)$ est divisible par $z-3$. Schéma de Horner :

2P

	1	-7+3i	10-17i	6+24i
3		3	-12+9i	-6-24i
	1	-4+3i	-2-8i	0

Donc $P(z) = (z-3)\cdot\left(z^2 + (-4+3i)\cdot z + (-2-8i)\right)$

$z^2 + (-4+3i)\cdot z + (-2-8i) = 0$ (4) $\Delta = (-4+3i)^2 - 4\cdot(-2-8i) = 16 - 24i - 9 + 8 + 32i = 15 + 8i$ 2P

$\delta = a + bi$ est une racine carrée de $\Delta \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 15 & (5) \\ 2ab = 8 & (6) \\ a^2 + b^2 = 17 & (7) \end{cases}$ $\sqrt{15^2 + 8^2} = \sqrt{225 + 64} = \sqrt{289} = 17$

(5) + (7) : $2a^2 = 32 \Leftrightarrow a^2 = 16 \Leftrightarrow$ $a = 4$ ou $a = -4$

et alors d'après (6) : $2b = 2$ $2b = -2$

$b = 1$ $b = -1$

Donc $\delta = 4 + i$ ou $\delta = -4 - i$ et les solutions de (4) sont 3P

$z_1 = \dfrac{4 - 3i - 4 - i}{2} = -2i$ et $z_2 = \dfrac{4 - 3i + 4 + i}{2} = 4 - i$. Ainsi $\underline{S = \{\, 3 ; -2i ; 4 - i \}}$ 2P

EXERCICE 3 :

Posons $A = \begin{pmatrix} m & 2 & 1 \\ 12 & 5m & -10 \\ 2m & 3 & 4 \end{pmatrix}$

$|A| = \begin{vmatrix} m & 2 & 1 \\ 12 & 5m & -10 \\ 2m & 3 & 4 \end{vmatrix} = 20m^2 - 40m + 36 - 10m^2 + 30m - 96 = 10m^2 - 10m - 60 = \underline{10\cdot(m+2)\cdot(m-3)}$.

car pour $m^2 - m - 6 = 0$ $\Delta = 1 + 24 = 25$ et $m = \dfrac{1-5}{2} = -2$ ou $m = \dfrac{1+5}{2} = 3$. 2,5P

a) Si $\underline{m \in \mathbb{R} - \{-2\,;3\}}$, <u>le système admet une solution unique</u> et dans ce cas

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 11 & 5m & -10 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 20m - 20 + 33 - 5m + 30 - 88 = 15m - 45 = \underline{15\cdot(m-3)} \text{ et}$$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{15\cdot(m-3)}{10\cdot(m+2)(m-3)} = \frac{3}{2\cdot(m+2)} = \underline{\frac{3}{2m+4}}$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 12 & 11 & -10 \\ 2m & 1 & 4 \end{vmatrix} = 44m - 20m + 12 - 22m + 10m - 48 = 12m - 36 = \underline{12\cdot(m-3)} \text{ et}$$

$$y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{12\cdot(m-3)}{10\cdot(m+2)(m-3)} = \underline{\frac{6}{5m+10}}$$

$$|A_z| = \begin{vmatrix} m & 2 & 1 \\ 12 & 5m & 11 \\ 2m & 3 & 1 \end{vmatrix} = 5m^2 + 44m + 36 - 10m^2 - 33m - 24 = -5m^2 + 11m + 12 \text{ et}$$

$-5m^2 + 11m + 12 = 0 \qquad \Delta = 121 + 240 = 361$

$\Leftrightarrow m = \dfrac{-11-19}{-10} = 3 \quad$ ou $\quad m = \dfrac{-11+19}{-10} = \dfrac{8}{-10} = -\dfrac{4}{5}$

Ainsi $|A_z| = -5\cdot(m-3)\cdot\left(m+\dfrac{4}{5}\right) = \underline{(m-3)\cdot(-5m-4)}$ et $z = \dfrac{|A_z|}{|A|} = \dfrac{(m-3)\cdot(-5m-4)}{10\cdot(m+2)(m-3)} = \underline{\dfrac{-5m-4}{10m+20}}$.

On a une solution unique, $\underline{S_m = \left\{ \left(\dfrac{3}{2m+4}; \dfrac{6}{5m+10}; \dfrac{-5m-4}{10m+20} \right) \right\}}$.

<u>Interprétation géométrique</u> : Les trois équations représentent trois plans qui se coupent en un point

$A_m\left(\dfrac{3}{2m+4}; \dfrac{6}{5m+10}; \dfrac{-5m-4}{10m+20} \right)$ $\boxed{8{,}5P}$

b) Si $\underline{m=-2}$, le système devient :

$$\begin{cases} -2x+2y+z=1 & L_1 \quad \text{Eliminons } x \text{ dans } L_2 \text{ et } L_3 \\ 12x-10y-10z=11 & L_2 \quad L_2 \to 6\cdot L_1+L_2 \\ -4x+3y+4z=1 & L_3 \quad L_3 \to -2\cdot L_1+L_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x+2y+z=1 & \text{Eliminons } y \text{ dans } L_3 \\ 2y-4z=17 & \\ -y+2z=-1 & L_3 \to L_2+2\cdot L_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x+2y+z=1 \\ 2y-4z=17 \\ 0y+0z=15 \quad \text{impossible} \end{cases} \quad \text{Ainsi } \underline{S_{-2}=\varnothing}$$

Interprétation géométrique : Les trois équations représentent trois plans qui n'ont pas de point en commun.

3P

c) Si $\underline{m=3}$, le système devient :

$$\begin{cases} 3x+2y+z=1 & L_1 \quad \text{Eliminons } x \text{ dans } L_2 \text{ et } L_3 \\ 12x+15y-10z=11 & L_2 \quad L_2 \to -4\cdot L_1+L_2 \\ 6x+3y+4z=1 & L_3 \quad L_3 \to -2\cdot L_1+L_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x+2y+z=1 & \\ 7y-14z=7 & L_2 \to L_2:(-7) \\ -y+2z=-1 & \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+2y+z=1 \\ -y+2z=-1 \\ -y+2z=-1 \end{cases}$$

Le système est simplement indéterminé. Posons $\underline{z=\alpha}$. De L_3 : $\underline{y=1+2\alpha}$ et dans L_1 : $3x=-2-4\alpha-\alpha+1$ et $\underline{x=-\frac{1}{3}-\frac{5}{3}\alpha}$ Ainsi $\underline{S_3=\left\{\left(-\frac{1}{3}-\frac{5}{3}\alpha\,;1+2\alpha\,;\alpha\right) \text{ où } \alpha\in\mathbb{R}\right\}}$

Interprétation géométrique :

Comme $\begin{cases} x= & -\frac{1}{3} & -\frac{5}{3}\cdot\alpha \\ y= & 1 & +2\cdot\alpha \\ z= & 0 & +1\cdot\alpha \end{cases}$. Posons $B\left(-\frac{1}{3};1;0\right)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix} -\frac{5}{3} \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ou $\vec{u}\begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$

Les trois équations représentent trois plans qui se coupent en une droite passant par le point B et de vecteur directeur $\vec{u}$.

4P

Autres notations possibles :

$S_3=\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{5}{6}\alpha\,;\alpha\,;\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{2}\right) \text{ où } \alpha\in\mathbb{R}\right\}$ et $B\left(\frac{1}{2};0;-\frac{1}{2}\right)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix} -\frac{5}{6} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ ou $\vec{u}\begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$

$S_3=\left\{\left(\alpha\,;\frac{3}{5}-\frac{6}{5}\alpha\,;-\frac{1}{5}-\frac{3}{5}\alpha\right) \text{ où } \alpha\in\mathbb{R}\right\}$ et $B\left(1;\frac{3}{5};-\frac{1}{5}\right)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{6}{5} \\ -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$ ou $\vec{u}\begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$

EXERCICE 4 :

a) $\begin{cases} x=2+2\alpha \\ y=2-\alpha \\ z=-1+\alpha \end{cases}$ où $\alpha\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z+1}{1} \Leftrightarrow \begin{cases} -x+2=2y-4 \\ y-2=-z-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x-2y+6=0 \\ y+z-1=0 \end{cases}$

Ainsi $\underline{d_1 \equiv \begin{cases} -x-2y+6=0 \\ y+z-1=0 \end{cases}}$ 3P

b) $A(1;-2;3)$, $B(9;2;-3)$, $C(2;1;-2)$. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$.

Comme $8=8\cdot 1$ mais $4\neq 8\cdot 3$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et *A*, *B* et *C* ne sont pas alignés.

$M(x;y;z)\in\pi_1 \Leftrightarrow dét\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & 8 & 1 \\ y+2 & 4 & 3 \\ z-3 & -6 & -5 \end{vmatrix}=0$

$\Leftrightarrow -20x+20-6y-12+24z-72-4z+12+18x-18+40y+80=0 \Leftrightarrow -2x+34y+20z+10=0$

$\Leftrightarrow x-17y-10z-5=0$

Equation cartésienne : $\underline{\pi_1 \equiv x-17y-10z-5=0 \quad (1)}$ 5P

c) $M(x;y;z)$ appartient à l'axe des abscisses $\Leftrightarrow y=0$ et $z=0$. Dans (1) $x-0-0-5=0 \Leftrightarrow x=5$

Ainsi $\underline{E(5;0;0)}$. 1P

d) $M(x;y;z)\in\pi_1\cap d_1 \Leftrightarrow$ il existe $\alpha\in\mathbb{R}$ tel que $\begin{cases} x=2+2\alpha & (2) \\ y=2-\alpha & (3) \\ z=-1+\alpha & (4) \\ x-17y-10z-5=0 & (5) \end{cases}$ 3P

(2) , (3) et (4) dans (5) donne $2+2\alpha-17\cdot(2-\alpha)-10\cdot(-1+\alpha)-5=0 \Leftrightarrow 9\alpha=27 \Leftrightarrow \alpha=3$

dans (2) , (3) et (4) on obtient $x=2+2\cdot 3=8 \quad y=2-3=-1 \quad z=-1+3=2$ ainsi $\underline{F(8;-1;2)}$.

e) $\overrightarrow{GH}\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\underline{d_2 \equiv \begin{cases} x= \quad 6\alpha \\ y= 1 -2\alpha \\ z=-2+4\alpha \end{cases} \text{ où } \alpha\in\mathbb{R}}$ 1P

f) $M(x;y;z)\in d_1\cap d_2 \Leftrightarrow$ il existe $\alpha\in\mathbb{R}$ tel que $\begin{cases} x=6\alpha & (1) \\ y=1-2\alpha & (2) \\ z=-2+4\alpha & (3) \\ -x-2y+6=0 & (4) \\ y+z-1=0 & (5) \end{cases}$

(1) et (2) dans (4) $\quad -(6\alpha)-2\cdot(1-2\alpha)+6=0 \Leftrightarrow -6\alpha-2+4\alpha+6=0 \Leftrightarrow -2\alpha=-4 \Leftrightarrow \alpha=2$

et (2) et (3) dans (5) $\quad 1-2\alpha-2+4\alpha-1=0 \Leftrightarrow 2\alpha-2=0 \Leftrightarrow \alpha=1$

Donc il n'existe pas un $\alpha\in\mathbb{R}$ qui vérifie les cinq équations. Ainsi $d_1\cap d_2=\varnothing$. 3P