CORRIGE MATHEMATIQUES I **Date de l'épreuve: 04 juin 2018**

Question I (4 + 6 + 2 + 3 = 15 points)

1. $P(z) = z^4 - z^3 + az^2 + b$

a) $P(1+i) = 0 \Leftrightarrow (1+i)^4 - (1+i)^3 + a(1+i)^2 + b = 0$

$\Leftrightarrow -4 - 2i(1+i) + a2i + b = 0$

$\Leftrightarrow -4 - 2i + 2 + 2ai + b = 0$

$\Leftrightarrow -2 + b + i(-2+2a) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -2+b=0 \\ -2+2a=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=2 \\ a=1 \end{cases}$

Alors $P(z) = z^4 - z^3 + z^2 + 2$.

b) $P(1-i) = (1-i)^4 - (1-i)^3 + (1-i)^2 + 2 = -4 + 2i(1-i) - 2i + 2 = -4 + 2i + 2 - 2i + 2 = 0$

Donc $1-i$ est aussi une racine de P.

c)

	1	-1	1	0	2
$1+i$		$1+i$	$-1+i$	$-1+i$	-2
	1	i	i	$-1+i$	0
$1-i$		$1-i$	$1-i$	$1-i$	
	1	1	1	0	

$P(z) = 0 \Leftrightarrow (z-1-i)(z-1+i)(z^2+z+1) = 0$

$\Leftrightarrow z = 1+i$ ou $z = 1-i$ ou $z^2+z+1 = 0$

$\Delta = -3 = 3i^2$

$\Leftrightarrow z = 1+i$ ou $z = 1-i$ ou $z = \dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ ou $z = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$

$$S = \left\{1+i\,;1-i\,;-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$$

2. a) $Z = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$

$z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$) est une racine carrée complexe de $\sqrt{2}+i\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = \sqrt{2} & (1) \\ x^2 + y^2 = 2 & (2) \\ 2xy = \sqrt{2} \end{cases}$ $\Rightarrow$ x et y sont de même signe

(1) + (2): $2x^2 = 2 + \sqrt{2} \Leftrightarrow x^2 = \dfrac{2+\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = \sqrt{\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}}$ ou $x = -\sqrt{\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}}$

(2) − (1): $2y^2 = 2 - \sqrt{2} \Leftrightarrow y^2 = \dfrac{2-\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow y = \sqrt{\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}}$ ou $y = -\sqrt{\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}}$

Les racines carrées complexes de Z sont :

$\sqrt{\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}} + i\sqrt{\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}}$ et $-\sqrt{\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}} - i\sqrt{\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}}$.

c) z est une racine carrée complexe de $\sqrt{2}+i\sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow z^2=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow (rcis\varphi)^2=2cis\frac{\pi}{4} \qquad \left(r\in\mathbb{R}_+^*,\ \varphi\in\mathbb{R}\right)$$

$$\Leftrightarrow r^2cis(2\varphi)=2cis\frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r^2=2 \\ 2\varphi=\frac{\pi}{4}+2k\pi, k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r=\sqrt{2} \\ \varphi=\frac{\pi}{8}+k\pi, k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

Les racines carrées complexes de Z sont : $\sqrt{2}cis\frac{\pi}{8}$ et $\sqrt{2}cis\frac{9\pi}{8}$.

d) Comme $\frac{9\pi}{8}$ est dans le troisième quadrant, on a :

$$\sqrt{2}cis\frac{9\pi}{8}=-\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}-i\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\frac{9\pi}{8}+i\sqrt{2}\sin\frac{9\pi}{8}=-\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}-i\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2}\cos\frac{9\pi}{8}=-\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}} \\ \sqrt{2}\sin\frac{9\pi}{8}=-\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2}\cos\frac{9\pi}{8}=-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} \\ \sqrt{2}\sin\frac{9\pi}{8}=-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\frac{9\pi}{8}=-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \\ \sin\frac{9\pi}{8}=-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \end{cases}$$

3. $M(z)\in E \Leftrightarrow (z-1-3i)(\overline{z}-1+3i)=5$ Posons $z=x+iy, x,y\in\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow (x+iy-1-3i)(x-iy-1+3i)=5$$

$$\Leftrightarrow \left[(x-1)+i(y-3)\right]\left[(x-1)-i(y-3)\right]=5$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-3)^2=5$$

L'ensemble E est le cercle de centre $C(1,3)$ et de rayon $\sqrt{5}$.

4. $(cis\ \alpha)^5(2+4i) = -3\sqrt{2}-\sqrt{2}i$

$\Leftrightarrow cis(5\alpha) = \dfrac{-3\sqrt{2}-\sqrt{2}i}{2+4i}\cdot\dfrac{2-4i}{2-4i}$

$\Leftrightarrow cis(5\alpha) = \dfrac{-6\sqrt{2}+12\sqrt{2}i-2\sqrt{2}i-4\sqrt{2}}{20}$

$\Leftrightarrow cis(5\alpha) = \dfrac{-10\sqrt{2}+10\sqrt{2}i}{20}$

$\Leftrightarrow cis(5\alpha) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}+i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\Leftrightarrow cis(5\alpha) = cis\dfrac{3\pi}{4}$

$\Leftrightarrow 5\alpha = \dfrac{3\pi}{4}+2k\pi,\ \ k\in\{0,1,2,3,4\}$

$\Leftrightarrow \alpha = \dfrac{3\pi}{20}+k\dfrac{2\pi}{5},\ \ k\in\{0,1,2,3,4\}$

Les rotations cherchées sont : $r_{O,\frac{3\pi}{20}}$, $r_{O,\frac{11\pi}{20}}$, $r_{O,\frac{19\pi}{20}}$, $r_{O,\frac{27\pi}{20}}$, $r_{O,\frac{35\pi}{20}}$.

Question II (3 + 7 + 5 = 15 points)

1. $\left(2x^4-\dfrac{3}{x^7}\right)^{11} = \sum_{i=0}^{11}(-1)^i C_{11}^i\left(2x^4\right)^{11-i}\left(\dfrac{3}{x^7}\right)^i$

$= \sum_{i=0}^{11}(-1)^i C_{11}^i 2^{11-i}3^i x^{44-4i}x^{-7i}$

$= \sum_{i=0}^{11}(-1)^i C_{11}^i 2^{11-i}3^i x^{44-11i}$

On obtient le terme constant pour $44-11i=0 \Leftrightarrow i=4$.

Le terme constant est donc $(-1)^4C_{11}^4 2^7 3^4 = 3\ 421\ 440$.

2.

$\left.\begin{array}{l}\text{5 billets de 5 €,}\\ \text{7 billets de 10 €,}\\ \text{10 billets de 20 €}\end{array}\right\}$ Total de 22 billets

Expérience aléatoire : tirer simultanément 8 billets parmi 22 billets

Evénement élémentaire : liste non ordonnée et sans répétition de 8 billets

$\#\Omega = C_{22}^8 = 319\ 770$

a) A = événement « n'avoir obtenu aucun billet de 5 € »

$\#A = C_{17}^8 = 24\ 310$ (tirer 8 billets parmi les billets de 10 € et de 20 €)

$P(A) = \dfrac{C_{17}^8}{C_{22}^8} \cong 0{,}076$

b) B = événement « avoir obtenu uniquement des billets de 20 € »

$P(B) = \dfrac{C_{10}^8}{C_{22}^8} \cong 1{,}41\cdot 10^{-4}$

c) C = événement « avoir obtenu des billets de deux valeurs exactement »
différentes possibilités pour obtenir des billets de deux valeurs exactement :

billets de 5 € et de 10 €	C_{12}^8	
billets de 5 € et de 20 €	$C_{15}^8 - C_{10}^8$	retirer les cas où on obtient uniquement des billets de 20 €
billets de 10 € et de 20 €	$C_{17}^8 - C_{10}^8$	retirer les cas où on obtient uniquement des billets de 20 €

$$P(C) = \frac{C_{12}^8 + C_{15}^8 - C_{10}^8 + C_{17}^8 - C_{10}^8}{C_{22}^8} \cong 0,097$$

d) D = événement « avoir obtenu au moins un billet de chaque valeur»

$$\begin{aligned} P(D) &= 1 - P(\text{billets d'une seule valeur}) - P(\text{billets de deux valeurs exactement}) \\ &= 1 - P(\text{billets de 20 € seulement}) - P(\text{billets de deux valeurs exactement}) \\ &\cong 1 - 1,41 \cdot 10^{-4} - 0,097 \\ &\cong 0,903 \end{aligned}$$

3. dé à quatre faces numérotées 0, 2, 3 et 5 et trois billes numérotées 1, 3 et 5.
Si le dé donne 0 → 0 €
Si le dé et la bille portent le même numéro → +5 €.
Dans tous les autres cas → +1 €.
X = gain du joueur

a) valeurs prises par X : 0, 1 et 5.

dé/bille	1	3	5
0	0	0	0
2	1	1	1
3	1	5	1
5	1	1	5

Loi de probabilité de X

x_i	0	1	5
$P(X = x_i)$	$\frac{3}{12}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{2}{12}$

b) $E(X) = 0 \cdot \frac{3}{12} + 1 \cdot \frac{7}{12} + 5 \cdot \frac{2}{12} = \frac{17}{12}$€

c) Soit n le gain dans le cas où le dé et la bille portent le même numéro.

x_i	0	1	n
$P(X = x_i)$	$\frac{3}{12}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{2}{12}$

$$E(X) = 10 \Leftrightarrow 1 \cdot \frac{7}{12} + n\frac{2}{12} = 10 \Leftrightarrow 7 + 2n = 120 \Leftrightarrow n = 56,5 \text{ €}$$

Question III (4 + 6 + 6 = 16 points)

1. centre de C : $O(0\,;0)$ et $e = 0{,}8 < 1$
donc : C est une ellipse.
$d \equiv y = 10\,, d \perp (Oy)$
donc : axe focal (Oy)
Par conséquent :
$C \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ avec $b > a$

Alors : $c^2 = b^2 - a^2 \Leftrightarrow a^2 = b^2 - c^2$
De plus : $e = \frac{c}{b} = \frac{4}{5} \Leftrightarrow \frac{b}{c} = \frac{5}{4}$

$d \equiv y = 10$
donc : $\frac{b^2}{c} = \frac{b \cdot b}{c} = \frac{5}{4} \cdot b = 10 \Leftrightarrow b = 8$
$\frac{8}{c} = \frac{5}{4} \Leftrightarrow c = \frac{32}{5}$
et : $a^2 = 8^2 - \left(\frac{32}{5}\right)^2 = \frac{576}{25}$

Par conséquent : $C \equiv \frac{x^2}{\frac{576}{25}} + \frac{y^2}{64} = 1$

2. $\Gamma \equiv y = -3 - \sqrt{x^2 - 2x + 10} \Leftrightarrow -y - 3 = \sqrt{x^2 - 2x + 10} \quad (E)$
CE : $-y - 3 \geq 0$ et $x^2 - 2x + 10 \geq 0$ (toujours vrai car $\Delta = -36 < 0$)
$\Leftrightarrow y \leq -3$

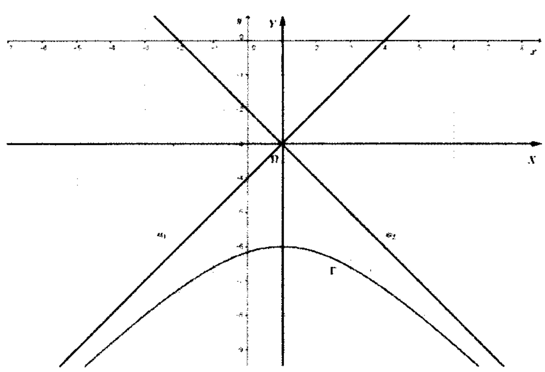
$$(E) \Leftrightarrow (-y-3)^2 = x^2 - 2x + 10 \text{ et } y \leq -3$$
$$\Leftrightarrow (y+3)^2 = x^2 - 2x + 1 + 9 \text{ et } y \leq -3$$
$$\Leftrightarrow (y+3)^2 = (x-1)^2 + 9 \text{ et } y \leq -3$$
$$\Leftrightarrow (x-1)^2 - (y+3)^2 = -9 \text{ et } y \leq -3$$
$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{9} - \frac{(y+3)^2}{9} = -1 \text{ et } y \leq -3$$

Γ est une demi-hyperbole de centre $\Omega(1,-3)$ et d'axe focal $(\Omega, \vec{j})$.
$a = 3$, $b = 3$ et $c = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$
Formules de changement de repère
$$\begin{cases} X = x - 1 \\ Y = y + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = X + 1 \\ y = Y - 3 \end{cases}$$

Equation des asymptotes dans $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$:
$$a_1 \equiv Y = \frac{b}{a} X \Leftrightarrow Y = X \text{ et } a_2 \equiv Y = -\frac{b}{a} X \Leftrightarrow Y = -X$$

Equation de Γ dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$:
$$\frac{X^2}{9} - \frac{Y^2}{9} = -1 \text{ et } Y \leq 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{Y^2}{9} = 1 + \frac{X^2}{9} \text{ et } Y \leq 0$$
$$\Leftrightarrow Y = -\sqrt{9 + X^2}$$

X	0	2	4	6
Y	-3	$-3{,}32$	$-3{,}61$	$-3{,}87$



3. a) $E \equiv x^2 + 3y^2 = 48$

Soit $M(x_0, y_0)$ un point de E et soit t_M la tangente à E au point $M(x_0, y_0)$.

Alors $t_M \equiv xx_0 + 3yy_0 = 48$

$P(4,4) \in t_M \Leftrightarrow 4x_0 + 12y_0 = 48$ (1)

$M(x_0, y_0) \in E \Leftrightarrow x_0^2 + 3y_0^2 = 48$ (2)

De (1) : $4x_0 = 48 - 12y_0 \Leftrightarrow x_0 = 12 - 3y_0$

Dans (2) : $(12 - 3y_0)^2 + 3y_0^2 = 48$

$\Leftrightarrow 144 - 72y_0 + 9y_0^2 + 3y_0^2 = 48$

$\Leftrightarrow 12y_0^2 - 72y_0 + 96 = 0$

$\Leftrightarrow y_0^2 - 6y_0 + 8 = 0$ $\quad\quad \Delta = 36 - 32 = 4$

$\Leftrightarrow y_0 = \dfrac{6-2}{2}$ ou $y_0 = \dfrac{6+2}{2}$

$\Leftrightarrow y_0 = 2$ ou $y_0 = 4$

Si $y_0 = 2$, alors $x_0 = 12 - 3 \cdot 2 = 6$.

Si $y_0 = 4$, alors $x_0 = 12 - 3 \cdot 4 = 0$.

Les deux points de contact des tangentes avec E sont $M_1(6,2)$ et $M_2(0,4)$.

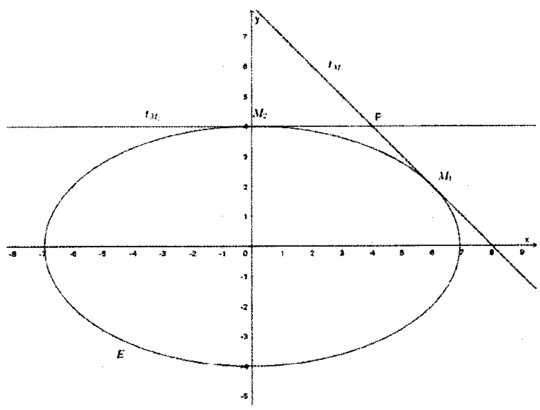
Les équations des tangentes sont :

$t_{M_1} \equiv 6x + 6y = 48 \Leftrightarrow x + y - 8 = 0$

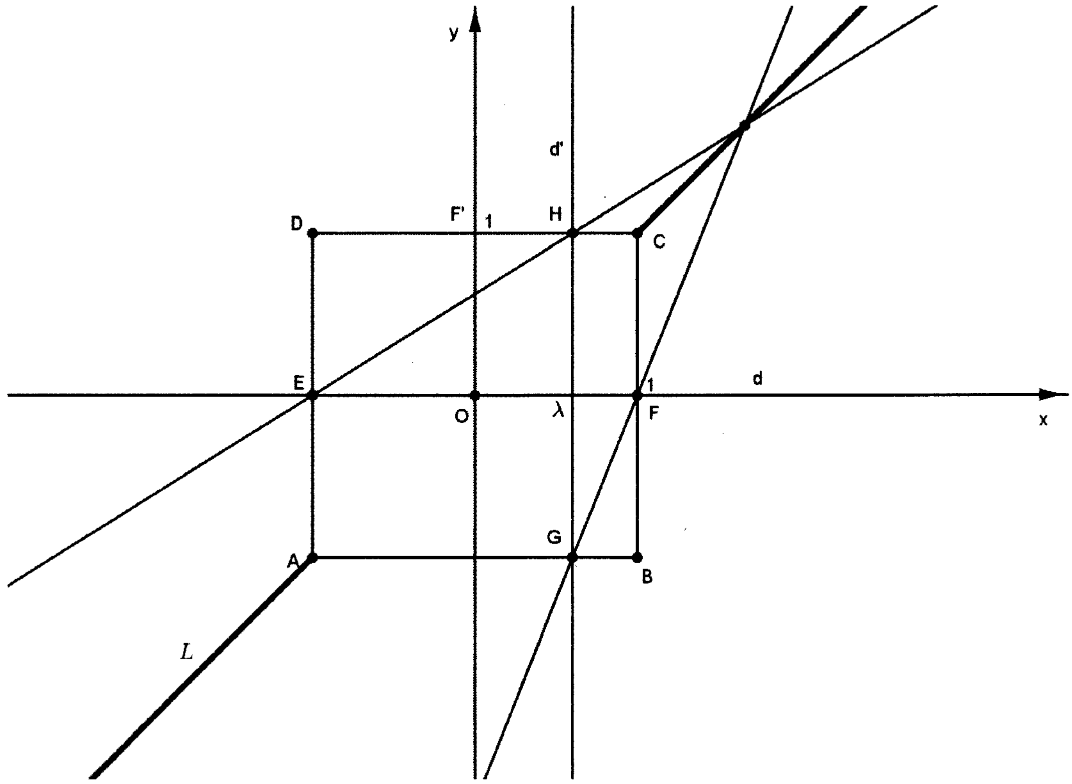
$t_{M_2} \equiv 12y = 48 \Leftrightarrow y = 4$

b) $x^2 + 3y^2 = 48 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{48} + \dfrac{y^2}{16} = 1$

$a = \sqrt{48} = 4\sqrt{3} \cong 6{,}9$ et $b = 4$



Question IV (14 points)



Prenons le repère orthonormé $(O,\overrightarrow{OF},\overrightarrow{OF'})$ où O est le centre du carré et F' le milieu de [DC].
Posons $E(-1;0)$, $F(1;0)$
et $G(\lambda,-1)$, $H(\lambda,1)$ avec $-1\leq\lambda\leq1$.

$$M(x,y)\in(EH)\Leftrightarrow \overrightarrow{EM}\begin{pmatrix}x+1\\y\end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{EH}\begin{pmatrix}\lambda+1\\1\end{pmatrix} \text{ colinéaires}$$

$$\Leftrightarrow\begin{vmatrix}x+1 & \lambda+1\\ y & 1\end{vmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow x+1-y(\lambda+1)=0 \quad (EH)$$

$$M(x,y)\in(GF)\Leftrightarrow \overrightarrow{GM}\begin{pmatrix}x-\lambda\\y+1\end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{GF}\begin{pmatrix}1-\lambda\\1\end{pmatrix} \text{ colinéaires}$$

$$\Leftrightarrow\begin{vmatrix}x-\lambda & 1-\lambda\\ y+1 & 1\end{vmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow x-\lambda-(y+1)(1-\lambda)=0 \quad (GF)$$

$$M(x,y)\in L=(EH)\cap(GF)$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x+1-y(\lambda+1)=0\\ x-\lambda-(y+1)(1-\lambda)=0\end{cases} \qquad -1\leq\lambda\leq1$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x+1-\lambda y-y=0 & (1)\\ x-\lambda-y+\lambda y-1+\lambda=0 & (2)\end{cases} \qquad -1\leq\lambda\leq1$$

$(1)+(2):\ 2x-2y=0 \Leftrightarrow y=x \quad (3)$

Donc $L \subset (AC) \equiv y=x$.

De (1) et (3): $x+1-\lambda x-x=0 \Leftrightarrow \lambda x=1 \quad (*)$

Si $\lambda=0$, alors $\overrightarrow{EH}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{GF}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ sont colinéaires, c'est-à-dire que $(EH)\,//\,(GF)$ et $(EH)\cap(GF)=\varnothing$.

Donc $\lambda=0$ ne donne pas un point du lieu L et on peut supposer que $\lambda \neq 0$.

Alors $(*) \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{\lambda}$

Si $\lambda=-1$, alors $x=-1$ et $y=-1$ et on obtient le point $A(-1,-1)$.

Si $\lambda=1$, alors $x=1$ et $y=1$ et on obtient le point $C(1,1)$.

- Première méthode pour trouver les valeurs prises par x :

  Si $0<\lambda\leq 1$, alors $\dfrac{1}{\lambda}\geq 1 \Leftrightarrow x\geq 1$ et on trouve $L_1=(AC)\backslash]CA)$.

  Si $-1\leq\lambda<0$, alors $\dfrac{1}{\lambda}\leq -1 \Leftrightarrow x\leq -1$ et on trouve $L_2=(AC)\backslash]AC)$.

  Alors $L=L_1\cup L_2=(AC)\backslash]AC[$.

- Deuxième méthode pour trouver les valeurs prises par x :

  Posons $x(\lambda)=\dfrac{1}{\lambda}$ pour $\lambda\neq 0$.

  Pour tout $\lambda\neq 0$, on a:

  $x'(\lambda)=-\dfrac{1}{\lambda^2}<0$

λ	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$x'(\lambda)$		$-$		$-$	$\Vert$	$-$		$-$	
$x(\lambda)$			-1	$\searrow$	$-\infty\ \Vert\ +\infty$	$\searrow$	1		

$$\lim_{\lambda\to 0^-} x(\lambda)=\lim_{\lambda\to 0^-}\frac{1}{\underbrace{\lambda}_{\to 0^-}}=-\infty \quad\text{et}\quad \lim_{\lambda\to 0^+} x(\lambda)=\lim_{\lambda\to 0^+}\frac{1}{\underbrace{\lambda}_{\to 0^+}}=+\infty$$

Ainsi, pour $-1\leq\lambda\leq 1$, $x(\lambda)\in]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[$, donc $L=(AC)\backslash]AC[$.