**Question 1**

Posons $P(z) = 3z^3 - (10 + 15i)z^2 + (-3 + 33i)z - 36i - 28$
Soit $z_0 = bi$ ($b \in \mathbb{R}$) une racine imaginaire pure de $P$.

$$
\begin{aligned}
P(z_0) = 0 \iff & \quad P(bi) = 0 \\
\iff & \quad 3(bi)^3 - (10 + 15i) \cdot (bi)^2 + (-3 + 33i) \cdot bi - 36i - 28 = 0 \\
\iff & \quad -3b^3 i + 10b^2 + 15b^2 i - 3bi - 33b - 36i - 28 = 0 \\
\iff & \quad \begin{cases} -3b^3 + 15b^2 - 3b - 36 = 0 \; (1) \\ 10b^2 - 33b - 28 = 0 \; (2) \end{cases}
\end{aligned}
$$

Résolvons (2) :

$$
\begin{aligned}
\Delta &= b^2 - 4ac \\
&= 33^2 - 4 \cdot 10 \cdot (-28) \\
&= 2209
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
b_1 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \\
&= \frac{+33 - \sqrt{2209}}{2 \cdot 10} \\
&= -\frac{7}{10}
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
b_2 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\
&= \frac{+33 + \sqrt{2209}}{2 \cdot 10} \\
&= 4
\end{aligned}
$$

$b = -\frac{7}{10}$ dans (1) : $\quad -3 \cdot \left(-\frac{7}{10}\right)^3 + 15 \cdot \left(-\frac{7}{10}\right)^2 - 3 \cdot \left(-\frac{7}{10}\right) - 36 = -25{,}521 \neq 0$

$b = 4$ dans (1) : $\quad -3 \cdot 4^3 + 15 \cdot 4^2 - 3 \cdot 4 - 36 = 0$

Donc $z_0 = 4i$ est une racine imaginaire pure de $P$.
Par conséquent, $P(z)$est divisible par $z - 4i$ et il existe donc un polynôme $Q$ tel que $P(z) = (z - 4i) \cdot Q(z)$.

Recherchons $Q(z)$ :

| | $3$ | $-10 - 15i$ | $-3 + 33i$ | $-28 - 36i$ |
|---|---|---|---|---|
| $4i$ | | $12i$ | $12 - 40i$ | $28 + 36i$ |
| | $3$ | $-10 - 3i$ | $9 - 7i$ | $0$ |

Donc $P(z) = (z - 4i) \cdot Q(z)$ avec $Q(z) = 3z^2 + (-10 - 3i)z + 9 - 7i$.
Or $P(z) = 0 \iff (z - 4i) \cdot Q(z) = 0 \iff z = 4i$ ou $Q(z) = 0$

Résolvons $Q(z) = 0$ :

$$
\begin{aligned}
\Delta &= b^2 - 4ac \\
&= (-10 - 3i)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (9 - 7i) \\
&= 100 + 60i - 9 - 108 + 84i \\
&= -17 + 144i
\end{aligned}
$$

Recherchons les racines carrées complexes de $\Delta$ :
$u = x + yi, (x;y) \in \mathbb{R}^2$ est une r.c.c. de $\Delta$

$$
\begin{aligned}
&\iff u^2 = \Delta \\
&\iff x^2 - y^2 + 2xyi = -17 + 144i \\
&\iff \begin{cases} x^2 - y^2 = -17 \\ 2xy = 144 \end{cases}
\end{aligned}
$$

De plus, $u^2 = \Delta$
$$\begin{aligned} &\Rightarrow |u^2| = |\Delta| \\ &\Leftrightarrow |u|^2 = |\Delta| \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 = \sqrt{17^2 + 144^2} \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 145 \end{aligned}$$

D'où le nouveau système :
$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -17 & (1) \\ xy = 72 > 0 & (2) \\ x^2 + y^2 = 145 & (3) \end{cases}$$

$(3) + (1)$
$$\begin{aligned} & 2x^2 = 128 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 = 64 \\ \Leftrightarrow\ & x = -8 \text{ ou } x = 8 \end{aligned}$$

$(3) - (1)$
$$\begin{aligned} & 2y^2 = 162 \\ \Leftrightarrow\ & y^2 = 81 \\ \Leftrightarrow\ & y = -9 \text{ ou } y = 9 \end{aligned}$$

D'après (2), $x$ et $y$ ont le même signe, d'où les r.c.c. de $\Delta$ sont :
$u_1 = -8 - 9i$ et $u_2 = 8 + 9i = \delta$

Les solutions de l'équation $Q(z) = 0$ sont :

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{-b - \delta}{2a} \\ &= \frac{-(-10 - 3i) - (8 + 9i)}{2 \cdot 3} \\ &= \frac{2 - 6i}{6} \\ &= \frac{1}{3} - i \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} z_2 &= \frac{-b + \delta}{2a} \\ &= \frac{-(-10 - 3i) + (8 + 9i)}{2 \cdot 3} \\ &= \frac{18 + 12i}{6} \\ &= 3 + 2i \end{aligned}$$

Finalement : $\mathcal{S}_{\mathbb{C}} = \left\{4i; \frac{1}{3} - i; 3 + 2i\right\}$

**Question 2**

1)

$$|z_1| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2}{3}$$

$$\left.\begin{aligned} \cos\Theta_1 &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\Theta_1 &= \frac{1}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \Theta_1 \equiv \frac{\pi}{6} \pmod{2\pi}$$

D'où : $z_1 = \frac{2}{3}\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{6}\right)$ (forme trig.)

$$|z_2| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}$$

$$\left.\begin{aligned} \cos\Theta_2 &= \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\Theta_2 &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \Theta_2 \equiv -\frac{\pi}{4} \pmod{2\pi}$$

D'où : $z_2 = 2\sqrt{2}\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ (forme trig.)

2)

$$\begin{aligned} Z &= \frac{(z_1)^2}{z_2} \\ &= \frac{\left(\frac{2}{3}\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)^2}{2\sqrt{2}\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right)} \\ &= \frac{\frac{4}{9}\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right)}{2\sqrt{2}\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right)} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{9}\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{9}\operatorname{cis}\left(\frac{7\pi}{12}\right) \end{aligned}$$

(forme trig.)

$$\begin{aligned} Z &= \frac{(z_1)^2}{z_2} \\ &= \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{3}i\right)^2}{2 - 2i} \\ &= \frac{\frac{1}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{9}i - \frac{1}{9}}{2 - 2i} \\ &= \frac{\frac{1}{9} + \frac{\sqrt{3}}{9}i}{1 - i} \cdot \frac{1 + i}{1 + i} \\ &= \frac{1}{9} \cdot \frac{1 + \sqrt{3}i + i - \sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{1 - \sqrt{3}}{18} + \frac{1 + \sqrt{3}}{18}i \end{aligned}$$

(forme alg.)

**Question 3**

1) $$\begin{aligned} \delta &= \begin{vmatrix} m & -1 & 2m-1 \\ m & m & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= m \cdot \begin{vmatrix} m & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + (2m-1) \cdot \begin{vmatrix} m & m \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= m \cdot (m+1) + (m-1) + (2m-1) \cdot (-2m) \\ &= m^2 + m + m - 1 - 4m^2 + 2m \\ &= -3m^2 + 4m - 1 \end{aligned}$$

Résolvons $\delta = 0$ :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4\cdot(-3)\cdot(-1) = 4$$

$$m_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4-\sqrt{4}}{2\cdot(-3)} = 1 \qquad m_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4+\sqrt{4}}{2\cdot(-3)} = \frac{1}{3}$$

Le système admet une solution unique ssi $m \in \mathbb{R} \setminus \left\{1; \frac{1}{3}\right\}$

2) $\boxed{m = 1}$

Alors $(s)$ s'écrit : $\begin{cases} x - y + z &= -2 \\ x + y + z &= 3 \\ x - y + z &= -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z &= -2 \ (1) \\ x + y + z &= 3 \ \ (2) \end{cases}$

De (1) : $x = y - z - 2$ (3)

(3) dans (2) : $y - z - 2 + y + z = 3 \Leftrightarrow 2y = 5 \Leftrightarrow y = \frac{5}{2}$ (4)

(4) dans (3) : $x = \frac{5}{2} - z - 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} - z$

Posons $z = \lambda$, alors $(s) \Leftrightarrow \begin{cases} x = & \frac{1}{2} & -\lambda \\ y = & \frac{5}{2} & \\ z = & & \lambda \end{cases}$

Le système $(s)$ est simplement indéterminé.

$\mathcal{S} = \left\{\left(\frac{1}{2} - \lambda; \frac{5}{2}; \lambda\right) | \lambda \in \mathbb{R}\right\}$

I.G. : Les équations de $(s)$ sont celles de trois plans de l'espace qui se coupent suivant la droite $d$ passant par le point $A\left(\frac{1}{2}; \frac{5}{2}; 0\right)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\boxed{m = \frac{1}{3}}$

Alors $(s)$ s'écrit : $\begin{cases} \frac{1}{3}x - y - \frac{1}{3}z &= -\frac{8}{3} \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y + z &= 3 \\ x - y + z &= -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3y - z &= -8 \ (1) \\ x + y + 3z &= 9 \ \ (2) \\ x - y + z &= -2 \ (3) \end{cases}$

De (1) : $x = 3y + z - 8$

(4) dans (2) : $3y + z - 8 + y + 3z = 9 \Leftrightarrow 4y + 4z = 17 \Leftrightarrow y + z = \frac{17}{4}$

(4) dans (3) : $3y + z - 8 - y + z = -2 \Leftrightarrow 2y + 2z = 6 \Leftrightarrow y + z = 3$

Le système $(s)$ est impossible.

$\mathcal{S} = \emptyset$

I.G. : Les équations de $(s)$ sont celles de trois plans de l'espace qui n'ont aucun point commun.

**Question 4**

1) Coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ : $\begin{pmatrix} 4-0 \\ 0-2 \\ 1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$

Coordonnées de $\overrightarrow{AC}$ : $\begin{pmatrix} 1-0 \\ 2-2 \\ 1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

$A$, $B$ et $C$ sont alignés $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{AC}$

$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{cases} 4 = k \\ -2 = 0 \\ -2 = -2k \end{cases}$ IMPOSSIBLE

Conclusion : Les points $A$, $B$ et $C$ ne sont pas alignés

Une équation cartésienne du plan $\pi$ qui passe par $A$, $B$ et $C$ :

$M(x; y; z) \in \pi \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires

$\Leftrightarrow det(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & 4 & 1 \\ y-2 & -2 & 0 \\ z-3 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow 4x + 6y + 2z - 18 = 0$

$\Leftrightarrow 2x + 3y + z - 9 = 0$

2) Un système d'équations paramétriques de la droite $d$ perpendiculaire au plan $\pi$ qui passe par $D$ :

$\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $\pi$ et comme $d \perp \pi$, $\vec{n}$ est un vecteur directeur de $d$.

$M(x; y; z) \in d \Leftrightarrow \overrightarrow{DM}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires

$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{DM} = k \cdot \vec{n}$

$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{cases} x-2 = 2k \\ y-3 = 3k \\ z-3 = k \end{cases}$

$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{cases} x = 2+2k \\ y = 3+3k \\ z = 3+k \end{cases}$

Un système d'équations cartésiennes de la droite $d$ perpendiculaire au plan $\pi$ qui passe par $D$ :

$M(x; y; z) \in d \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{cases} x = 2+2k \\ y = 3+3k \\ z = 3+k \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \exists k \in \mathbb{R} \text{ tel que } k = z-3 \\ x = 2+2k \\ y = 3+3k \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \exists k \in \mathbb{R} \text{ tel que } k = z - 3 \\ x = 2 + 2 \cdot (z - 3) \\ y = 3 + 3 \cdot (z - 3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2z + 4 = 0 \\ y - 3z + 6 = 0 \end{cases}$$

3) Coordonnées du point d'intersection de la droite $d$ et du plan $\pi$ :

$$I(x;y;z) \in \pi \cap d \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y + z - 9 = 0 & (1) \\ x = 2 + 2k & (2) \\ y = 3 + 3k & (3) \\ z = 3 + k & (4) \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R})$$

(2), (3) et (4) dans (1) :

$$2 \cdot (2 + 2k) + 3 \cdot (3 + 3k) + 3 + k - 9 = 0 \Leftrightarrow 7 + 14k = 0 \Leftrightarrow k = -\frac{1}{2} \; (5)$$

(5) dans (2) : $x = 2 + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow x = 1$

(5) dans (3) : $y = 3 + 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow y = \frac{3}{2}$

(5) dans (4) : $z = 3 + \left(-\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow z = \frac{5}{2}$

Conclusion : $\pi$ et $d$ se coupent au point $I\left(1;\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right)$.

**Question 5**

1)

$$\begin{aligned}\left(\frac{2}{x}-3x^2\right)^{14} &= \sum_{k=0}^{14} C_{14}^k(-1)^k\left(\frac{2}{x}\right)^{14-k}(3x^2)^k\\ &= \sum_{k=0}^{14} C_{14}^k(-1)^k\cdot 2^{14-k}\cdot x^{k-14}\cdot 3^k\cdot x^{2k}\\ &= \sum_{k=0}^{14} C_{14}^k(-1)^k 2^{14-k}\cdot 3^k\cdot x^{3k-14}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x^{3k-14}=x^{13} &\Leftrightarrow 3k-14=13\\ &\Leftrightarrow 3k=27\\ &\Leftrightarrow k=9\end{aligned}$$

Terme en $x^{13}$ : $C_{14}^9(-1)^9 2^{14-9}\cdot 3^9\cdot x^{3\cdot 9-14} = -1\cdot 2002\cdot 32\cdot 19683\cdot x^{13}$
$= -1260971712x^{13}$

2) Tous les événements élémentaires sont équiprobables
card $\Omega = C_{100}^3 = 161700$
   a) $A$: « l'acheteur gagne exactement 30€ »
   $3\cdot 10$€ ou ($1\cdot 30$€ et $2\cdot 0$€)
   card $A = C_{10}^3 + C_5^1\cdot C_{84}^2 = 120 + 5\cdot 3486 = 17550$
   $$p(A)=\frac{\text{card } A}{\text{card }\Omega}=\frac{17550}{161700}=\frac{117}{1078}\approx 0{,}11$$
   b) $B$: « l'acheteur gagne au moins 30€ »
   $\bar{B}$: « l'acheteur gagne au plus 20€ »
   $3\cdot 0$€ ou ($1\cdot 10$€ et $2\cdot 0$€) ou ($2\cdot 10$€ et $1\cdot 0$€)
   card $\bar{B} = C_{84}^3 + C_{10}^1\cdot C_{84}^2 + C_{10}^2\cdot C_{84}^1 = 95284 + 10\cdot 3486 + 45\cdot 84 = 133924$
   $$p(B)=1-p(\bar{B})=1-\frac{\text{card }\bar{B}}{\text{card }\Omega}=1-\frac{133924}{161700}=\frac{992}{5775}\approx 0{,}17$$

3) Manières possibles :
   a) $P_8 = 8! = 40320$
   b) $7\cdot P_6\cdot P_2 = 7\cdot 6!\cdot 2! = 5040\cdot 2 = 10080$
   c) $P_4\cdot P_4\cdot P_2 = 4!\cdot 4!\cdot 2! = 24\cdot 24\cdot 2 = 1152$
   d) $P_5\cdot P_3\cdot 4 = 5!\cdot 3!\cdot 4 = 120\cdot 6\cdot 4 = 2880$
   e) $P_4\cdot 2^4 = 4!\cdot 2^4 = 24\cdot 16 = 384$