Corrigé de l'épreuve écrite en Mathématiques II

Question 1

(1) a) $\text{dom}\, f_m = \text{dom}_c\, f_m = \mathbb{R}_+^*$

b) **Etude en 0** :

$$\lim_{x\to 0^+} f_m(x) = \lim_{x\to 0^+} \underbrace{x}_{\to 0} - \underbrace{\frac{m}{x}}_{\to +\infty} - \underbrace{(m+1)\ln x}_{\to -\infty}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} -\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to +\infty} \underbrace{\left(m + (m+1) \underbrace{x \ln x}_{\substack{\to 0,\\ \text{voir c. à p.}}} \right)}_{\to m>0}$$

$$= -\infty \quad \Rightarrow \quad \text{A.V. : } x = 0$$

Calcul à part :

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{\text{"}\frac{-\infty}{+\infty}\text{"}}{\underset{H}{=}} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} -x = 0$$

b) **Etude en** $+\infty$:

$$\lim_{x\to +\infty} f_m(x) = \lim_{x\to +\infty} \underbrace{x}_{\to +\infty} - \underbrace{\frac{m}{x}}_{\to 0} - \underbrace{(m+1)\ln x}_{\to +\infty}$$

$$= \lim_{x\to +\infty} x \underbrace{\left(1 - (m+1) \underbrace{\frac{\ln x}{x}}_{\substack{\to 0\\ \text{voir c. à p.}}} \right)}_{\to 1}$$

$$= +\infty \quad \Rightarrow \quad \text{pas d'A.H.}$$

Calcul à part :

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} \overset{\text{"}\frac{+\infty}{+\infty}\text{"}}{\underset{H}{=}} \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f_m(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} 1 - \underbrace{\frac{m}{x^2}}_{\to 0} - \underbrace{(m+1)\frac{\ln x}{x}}_{\to 0 \text{ voir c. à. p.}} = 1$$

$$\lim_{x\to +\infty} f_m(x) - x = \lim_{x\to +\infty} - \underbrace{\frac{m}{x}}_{\to 0} - \underbrace{(m+1)\ln x}_{\to +\infty} = -\infty$$

Donc : pas d'A.O.D mais une B.P.D. de direction asymptotique $y = x$.

(2) a) $\text{dom}\, f_m' = \mathbb{R}_+^*$

$$f_m'(x) = 1 + \frac{m}{x^2} - \frac{m+1}{x} = \frac{x^2 + m - (m+1)x}{x^2} = \frac{x^2 - (m+1)x + m}{x^2}$$

On détermine les racines du trinôme au numérateur :

$$\Delta = (m+1)^2 - 4m = (m-1)^2 \geq 0$$

$$x_1 = \frac{m+1-(m-1)}{2} = 1,\ x_2 = \frac{m+1+m-1}{2} = m$$

Si $m = 1$, il y a une racine double ($x_1 = x_2 = 1$), sinon les deux racines sont distinctes.

Dans tous les cas :

$$f_m'(x) = \frac{(x-1)(x-m)}{x^2}$$

b) **1^er^ cas** : $\boxed{0<m<1}$

x	0	m		1	$+\infty$
$f_m'(x)$	$\|\|$ $+$	0	$-$	0	$+$
$f_m(x)$	$\|\|$ $-\infty$ $\nearrow$	$f_m(m)$ (max)	$\searrow$	$1-m$ (min)	$\nearrow$ $+\infty$

Maximum : $f_m(m)=m-1-(m+1)\ln m$

(Le point d'abscisse 1 est un minimum (relatif).)

2^e^ cas : $\boxed{m=1}$

x	0	1	$+\infty$
$f_m'(x)$	$\|\|$ $+$	0	$+$
$f_m(x)$	$\|\|$ $-\infty$ $\nearrow$	0	$\nearrow$ $+\infty$

Le point d'abscisse 1 est un ***point d'inflexion à tangente horizontale***.

3^e^ cas : $\boxed{m>1}$

x	0	1		m	$+\infty$
$f_m'(x)$	$\|\|$ $+$	0	$-$	0	$+$
$f_m(x)$	$\|\|$ $-\infty$ $\nearrow$	$1-m$ (max)	$\searrow$	$f_m(m)$ (min)	$\nearrow$ $+\infty$

Minimum : $f_m(m)=m-1-(m+1)\ln m$

(Le point d'abscisse 1 est un maximum (relatif).)

c) **1^er^ cas** : $\boxed{0<m<1}$

Alors le minimum $f_m(1)=1-m>0$, donc le maximum $f_m(m)>0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires il y a 1 racine dans $]0,m[$. Il n'y a pas de racine dans $[m,+\infty[$.

2^e^ cas : $\boxed{m=1}$

f_1 est strictement croissante et donc 1 est la seule racine de la fonction.

3^e^ cas : $\boxed{m>1}$

Alors le maximum $f_m(1)=1-m<0$, donc le minimum $f_m(m)<0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires il y a 1 racine dans $]m,+\infty[$. Il n'y a pas de racine dans $]0,m]$.

En résumé : f_m admet toujours une seule racine, pour tout $m>0$.

(3) $\operatorname{dom} f_m'' = \mathbb{R}_+^*$

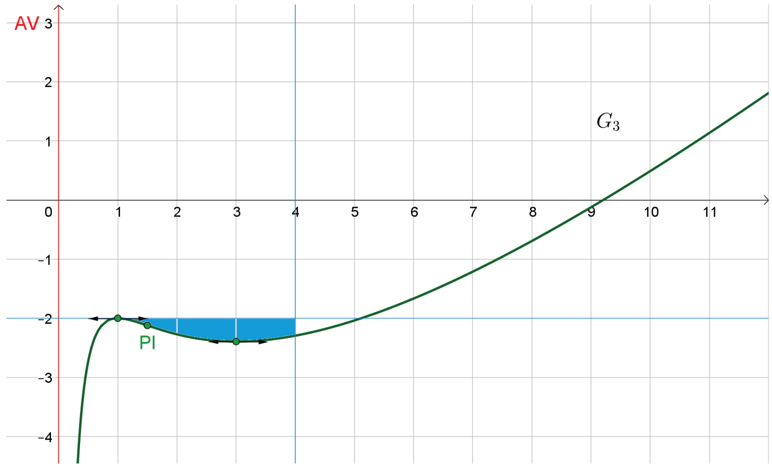
$$f_m''(x)=\left(1+\frac{m}{x^2}-\frac{m+1}{x}\right)'$$

$$=-\frac{2m}{x^3}+\frac{(m+1)}{x^2}=\frac{(m+1)x-2m}{x^3}$$

$$f_m''(x)=0 \Leftrightarrow x=\frac{2m}{m+1}>0$$

x	0	$\frac{2m}{m+1}$	$+\infty$
$f_m''(x)$	$\Vert$ $\quad -$	0	$+$
$\mathcal{G}_m$	$\Vert$	Point d'inflexion	

(4) Représentation graphique de f_3



Point d'inflexion : $\left(\frac{3}{2}\,;f_3\left(\frac{3}{2}\right)\right)=\left(\frac{3}{2}\,;-\frac{1}{2}-4\ln\frac{3}{2}\right)\approx(1{,}5\,;-2{,}12)$

Minimum : $(3\,;f_3(3))=(3\,;\;2-4\ln 3)\approx(3\,;-2{,}4)$

Maximum : $(1,f_3(1))=(1,-2)$

(5) La tangente *t* a comme équation $y=-2$.

Comme $f_3(4)=4-\frac{3}{4}-4\ln 4=\frac{13}{4}-8\ln 2\approx -2{,}3<-2$, $\mathcal{G}_3$ se situe en dessous de la tangente *t* sur $[1,4]$ et l'aire de la partie cherchée est :

$$\mathcal{A}=\int_1^4\left(-2-f_3(x)\right)\mathrm{d}x$$
$$=\int_1^4\left(-2-x+\frac{3}{x}+4\ln x\right)\mathrm{d}x$$
$$=\left[-2x-\frac{1}{2}x^2+3\ln x+4x\ln x-4x\right]_1^4$$
$$=\left[-6x-\frac{1}{2}x^2+3\ln x+4x\ln x\right]_1^4$$
$$=-24-8+3\ln 4+16\ln 4+6+\frac{1}{2}$$
$$=-\frac{51}{2}+19\ln 4\approx 0{,}84\text{ u.a.}$$

Calcul à part :

$\int \ln x\,\mathrm{d}x$

$=x\ln x-\int \cancel{x}\cdot\frac{1}{\cancel{x}}\mathrm{d}x$

$=x\ln x-x+k$, sur $\mathbb{R}_+^*$

I.P.P :

$u(x)=\ln x \qquad u'(x)=\frac{1}{x}$

$v'(x)=1 \qquad v(x)=x$

Question 2

(1) $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x^{-\frac{1}{2}}}{e^{\frac{1}{x}}}\overset{\frac{"+\infty"}{+\infty}}{\underset{H}{=}}\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}}{e^{\frac{1}{x}}\left(-x^{-2}\right)}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x^{\frac{1}{2}}}{2e^{\frac{1}{x}}}="\dfrac{0}{+\infty}"=0$

Comme $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=f(0)$, f est continue en 0 et $\operatorname{dom}_c f=\mathbb{R}_+$

(2)

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^{\frac{3}{2}}}=\lim_{x\to0^+}\frac{x^{-\frac{3}{2}}}{e^{\frac{1}{x}}}$$

$$\overset{\frac{"+\infty"}{+\infty}}{\underset{H}{=}}\lim_{x\to0^+}\frac{-\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}}}{e^{\frac{1}{x}}\left(-x^{-2}\right)}$$

$$=\frac{3}{2}\lim_{x\to0^+}\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{e^{\frac{1}{x}}}=\frac{3}{2}\lim_{x\to0^+}\underbrace{\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{\sqrt{x}}}_{f(x)}=0 \text{ d'après (1)}$$

Donc $f'(0)=0$ et $\mathcal{G}_f$ admet en $(0,0)$ une demi-tangente horizontale. $\operatorname{dom} f'=\mathbb{R}_+$.

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{\sqrt{x}}="\dfrac{1}{+\infty}"=0$, donc A.H.D. : $y=0$.

(4) $\operatorname{dom} f'=\mathbb{R}_+$

$$\left(\forall x\in]0,+\infty[\right)\quad f'(x)=\frac{e^{-\frac{1}{x}}x^{-2}\sqrt{x}-e^{-\frac{1}{x}}\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}=\frac{e^{-\frac{1}{x}}(2x^{-1}-1)}{2x\sqrt{x}}=\frac{e^{-\frac{1}{x}}(2-x)}{2x^2\sqrt{x}}$$

et $f'(0)=0$ d'après la question (2)

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0 (m)	$\nearrow$	$\frac{1}{\sqrt{2e}}$ (M)	$\searrow$	0

(5) Comme f est continue sur $\mathbb{R}_+$, on a d'après le théorème des valeurs intermédiaires et le tableau des variations ci-dessus :

a	$-\infty$	0		$\frac{1}{\sqrt{2e}}$	$+\infty$
Nombre de sol. de $f(x)=a$	0	1	2	1	0

Question 3

(1) $\log_{\frac{1}{2}}\left|5\cdot 2^x-3\right|\geq -2x-1$ (I)

C.E. : $5\cdot 2^x-3\neq 0 \Leftrightarrow 2^x\neq \frac{3}{5}\Leftrightarrow x\neq \log_2\left(\frac{3}{5}\right)$, donc $\text{dom}=\mathbb{R}\setminus\left\{\log_2\left(\frac{3}{5}\right)\right\}$

$(\forall x\in\text{dom})$ $\text{(I)}\Leftrightarrow \left|5\cdot 2^x-3\right|\leq\left(\frac{1}{2}\right)^{-2x-1}\Leftrightarrow\left|5\cdot 2^x-3\right|\leq 2^{2x+1}\Leftrightarrow\left|5\cdot 2^x-3\right|\leq\underbrace{2\cdot 2^{2x}}_{>0}$

$\boxed{1^{\text{er}}\text{ cas}}$: $5\cdot 2^x-3>0\Leftrightarrow x>\log_2\left(\frac{3}{5}\right)$

Alors : $\text{(I)}\Leftrightarrow 5\cdot 2^x-3\leq 2\cdot 2^{2x}$

Posons $y=2^x$:

$5y-3\leq 2y^2$

$\Leftrightarrow 2y^2-5y+3\geq 0$

$\Leftrightarrow (y-1)(2y-3)\geq 0$

$\Leftrightarrow y\leq 1$ ou $y\geq\frac{3}{2}$

On revient à x :

$2^x\leq 1$ ou $2^x\geq\frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow x\leq 0$ ou $x\geq\log_2\left(\frac{3}{2}\right)$

$\boxed{S_1=]\log_2\left(\tfrac{3}{5}\right),0]\cup[\log_2\left(\tfrac{3}{2}\right),+\infty[}$

$\boxed{2^{\text{e}}\text{ cas}}$: $5\cdot 2^x-3<0\Leftrightarrow x<\log_2\left(\frac{3}{5}\right)$

Alors : $\text{(I)}\Leftrightarrow -5\cdot 2^x+3\leq 2\cdot 2^{2x}$

Posons $y=2^x$:

$-5y+3\leq 2y^2$

$\Leftrightarrow 2y^2+5y-3\geq 0$

$\Leftrightarrow (y+3)(2y-1)\geq 0$

$\Leftrightarrow y\leq -3$ ou $y\geq\frac{1}{2}$

On revient à x :

$\underbrace{2^x\leq -3}_{\text{impossible}}$ ou $2^x\geq\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x\geq -1$

$\boxed{S_2=[-1,\log_2\left(\tfrac{3}{5}\right)[}$

Donc : $S=S_1\cup S_2=\left([-1,0]\setminus\left\{\log_2\left(\frac{3}{5}\right)\right\}\right)\cup[\log_2\left(\frac{3}{2}\right),+\infty[$.

Remarque : Une solution alternative consiste à écrire : $\text{(I)}\Leftrightarrow -2\cdot 2^{2x}\leq 5\cdot 2^x-3\leq 2\cdot 2^{2x}$.

(2) $\log_{\frac{25}{4}}\left(x+\frac{1}{x}\right)+\log_{\frac{2}{5}}(x-1)=\frac{1}{2}$ (E)

C.E. : a) $x+\frac{1}{x}>0\Leftrightarrow\frac{x^2+1}{x}>0\Leftrightarrow x>0$ et b) $x-1>0\Leftrightarrow x>1$, donc : $\text{dom}=]1,+\infty[$.

$(\forall x\in\text{dom})$ $\text{(E)}\Leftrightarrow\dfrac{\log_{\frac{2}{5}}\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\log_{\frac{2}{5}}\left(\frac{25}{4}\right)}+\log_{\frac{2}{5}}(x-1)=\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\log_{\frac{2}{5}}\left(x+\frac{1}{x}\right)+\log_{\frac{2}{5}}(x-1)=\frac{1}{2}\qquad /\cdot 2$

$\Leftrightarrow 2\log_{\frac{2}{5}}(x-1)=\log_{\frac{2}{5}}\left(\frac{2}{5}\right)+\log_{\frac{2}{5}}\left(x+\frac{1}{x}\right)$

$\Leftrightarrow \log_{\frac{2}{5}}(x-1)^2=\log_{\frac{2}{5}}\frac{2}{5}\left(x+\frac{1}{x}\right)$

$\Leftrightarrow (x-1)^2=\frac{2}{5}\left(x+\frac{1}{x}\right)$

$\Leftrightarrow x^2-2x+1=\frac{2x}{5}+\frac{2}{5x}\quad /\cdot 5x$

$\Leftrightarrow 5x^3-10x^2+5x=2x^2+2$

$\Leftrightarrow \underbrace{5x^3-12x^2+5x-2}_{p(x)}=0$

On remarque que $p(2)=0$. Le schéma de Horner conduit à : $p(x)=(x-2)\left(5x^2-2x+1\right)$

Le discriminant du trinôme entre parenthèses est : $\Delta=4-20=-16<0$. Donc : $S=\{2\}$.

Question 4

(1) Signe de $p(x)$:

x	$-\infty$	1		2	$+\infty$
$x-1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$(x-2)^4$	$+$	$+$	$+$	0	$+$
$p(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$

Calcul d'une primitive de $p(x)$:

$$\begin{aligned} P(x) &= \int (x-1)(x-2)^4\,\mathrm{d}x \qquad (\text{poser} : u = x-2 \Leftrightarrow x = u+2,\ \mathrm{d}x = \mathrm{d}u) \\ &= \int (u+1)u^4\,\mathrm{d}u = \int \left(u^5 + u^4\right)\mathrm{d}u \\ &= \tfrac{1}{6}u^6 + \tfrac{1}{5}u^5 + k \\ &= \tfrac{1}{6}(x-2)^6 + \tfrac{1}{5}(x-2)^5 + k, \text{ sur } \mathbb{R} \end{aligned}$$

Pour le calcul de l'aire, on choisit $k = 0$:

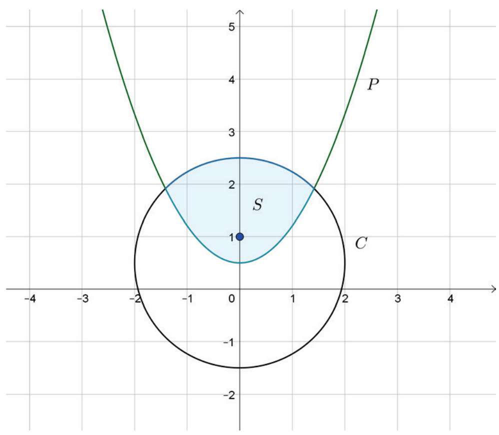
$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= -\int_0^1 p(x)\,\mathrm{d}x + \int_1^3 p(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -P(1) + P(0) + P(3) - P(1) \\ &= P(0) + P(3) - 2P(1) \\ &= \tfrac{1}{6}\cdot 2^6 - \tfrac{1}{5}\cdot 2^5 + \tfrac{1}{6}\cdot 1^6 + \tfrac{1}{5}\cdot 1^5 - 2\cdot\left(\tfrac{1}{6}\cdot 1^6 - \tfrac{1}{5}\cdot 1^5\right) \\ &= \tfrac{32}{3} - \tfrac{32}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{3} + \tfrac{2}{5} = \tfrac{47}{10} \text{ u.a.} \end{aligned}$$

(2) a) Equation du cercle :

$$\begin{aligned} &\mathcal{C} : x^2 + (y - \tfrac{1}{2})^2 = 4 \\ &\Leftrightarrow \left(y - \tfrac{1}{2}\right)^2 = 4 - x^2 \\ &\Leftrightarrow y = \pm\sqrt{4 - x^2} + \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

Les points d'intersection de C et $\mathcal{P}$ sont situés sur le demi-cercle supérieur (voir figure et remarque ci-dessous). Déterminons les abscisses de ces points d'intersection :

$$\begin{aligned} &\sqrt{4-x^2} + \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{\sqrt{2}}x^2 + \tfrac{1}{2} \qquad \text{C.E. : } -2 \le x \le 2 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{4-x^2} = \tfrac{1}{\sqrt{2}}x^2 \\ &\Leftrightarrow 4 - x^2 = \tfrac{1}{2}x^4 \\ &\Leftrightarrow x^4 + 2x^2 - 8 = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(x^2+1\right)^2 - 9 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 + 1 = \pm 3 \\ &\Leftrightarrow x^2 = 2 \text{ ou } \underbrace{x^2 = -4}_{\text{impossible}} \\ &\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2} \end{aligned}$$



(***Remarque*** : L'équation $-\sqrt{4-x^2} + \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{\sqrt{2}}x^2 + \tfrac{1}{2} \Leftrightarrow \underbrace{-\sqrt{4-x^2}}_{\le 0} = \underbrace{\tfrac{1}{\sqrt{2}}x^2}_{\ge 0}$ n'a pas de solution.)

b) Par symétrie le volume cherché est :

$$\mathcal{V} = 2\pi\int_0^{\sqrt{2}} \left(\sqrt{4-x^2}+\tfrac{1}{2}\right)^2 - \left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}x^2+\tfrac{1}{2}\right)^2 \mathrm{d}x$$

$$= 2\pi\int_0^{\sqrt{2}} \left(4-x^2+\sqrt{4-x^2}+\cancel{\tfrac{1}{4}}-\tfrac{1}{2}x^4-\tfrac{1}{\sqrt{2}}x^2-\cancel{\tfrac{1}{4}}\right)\mathrm{d}x$$

$$= 2\pi\int_0^{\sqrt{2}} \left(4-\left(1+\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)x^2-\tfrac{1}{2}x^4+\sqrt{4-x^2}\right)\mathrm{d}x$$

$$= 2\pi\left[4x-\tfrac{1}{3}\left(1+\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)x^3-\tfrac{1}{10}x^5\right]_0^{\sqrt{2}}+2\pi\left(\tfrac{\pi}{2}+1\right) \quad \text{(voir calcul à part ci-dessous)}$$

$$=8\pi\sqrt{2}-\frac{4\sqrt{2}\pi}{3}\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\frac{4\sqrt{2}\pi}{5}+2\pi\left(\frac{\pi}{2}+1\right)$$

$$=8\pi\sqrt{2}-\frac{4\sqrt{2}\pi}{3}-\frac{4\pi}{3}-\frac{4\sqrt{2}\pi}{5}+\pi^2+2\pi$$

$$=\pi^2+\frac{2\pi}{3}+\frac{88\sqrt{2}\pi}{15} \text{ u.v.}$$

Calcul à part :

$$\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{4-4\sin^2 t}\cdot 2\cos t\,\mathrm{d}t$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t\,\mathrm{d}t \quad \left(\text{car } \sqrt{1-\sin^2 t}=|\cos t|=\underbrace{\cos t}_{\geq 0}\right)$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1+\cos(2t)\right)\mathrm{d}t$$

$$=2\left[t+\tfrac{1}{2}\sin(2t)\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\tfrac{\pi}{2}+1$$

On pose :
$x=2\sin t,\ \mathrm{d}x=2\cos t\,\mathrm{d}t$

x	0	$\sqrt{2}$
t	0	$\frac{\pi}{4}$

Question 5

(1)

I.P.P :

$u(x)=\mathrm{Arctan}(2x) \qquad u'(x)=\dfrac{2}{1+4x^2}$

$v'(x)=x+1 \qquad v(x)=\dfrac{1}{2}x^2+x$

$$\int (x+1)\,\mathrm{Arctan}(2x)\,\mathrm{d}x$$

$$=\left(\frac{1}{2}x^2+x\right)\mathrm{Arctan}(2x)-\int\frac{x^2+2x}{1+4x^2}\mathrm{d}x$$

$$=\left(\frac{1}{2}x^2+x\right)\mathrm{Arctan}(2x)-\int\frac{2x}{1+4x^2}\mathrm{d}x-\int\frac{x^2+\frac{1}{4}}{1+4x^2}\mathrm{d}x+\int\frac{\frac{1}{4}}{1+4x^2}\mathrm{d}x$$

$$=\left(\frac{1}{2}x^2+x\right)\mathrm{Arctan}(2x)-\frac{1}{4}\ln\left(1+4x^2\right)-\int\frac{1}{4}\mathrm{d}x+\frac{1}{8}\mathrm{Arctan}(2x)+k$$

$$=\left(\frac{1}{2}x^2+x+\frac{1}{8}\right)\mathrm{Arctan}(2x)-\frac{1}{4}\ln\left(1+4x^2\right)-\frac{x}{4}+k,\ \text{sur } \mathbb{R}$$

(2)

$$\int \frac{1}{\cos^2 x \sin x}\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{\tan x}{\sin x} + \int \frac{\cos x}{\sin^2 x}\cdot\frac{\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{\cos x} + \int \frac{1}{\sin x}\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{\cos x} + \int \frac{1}{\frac{2t}{\cancel{1+t^2}}}\frac{2}{\cancel{1+t^2}}\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{\cos x} + \int \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{\cos x} + \ln|t| + k$$
$$= \frac{1}{\cos x} + \ln\tan\frac{x}{2} + k,\ \text{sur } \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$$

I.P.P. :

$f(x) = \dfrac{1}{\sin x}$ $\qquad$ $f'(x) = -\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}$

$g'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ $\qquad$ $g(x) = \tan x$

Poser :

$t = \tan\dfrac{x}{2} \Leftrightarrow x = 2\,\mathrm{Arctan}\,t$

$\mathrm{d}x = \dfrac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$

Solution alternative :

$$\int \frac{1}{\cos^2 x \sin x}\,\mathrm{d}x$$
$$= \int \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x \sin x}\,\mathrm{d}x$$
$$= \int \left(\frac{1}{\sin x} + \frac{\sin x}{\cos^2 x}\right)\mathrm{d}x$$
$$= \int \frac{1}{\sin x}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\cos x} = \ldots$$