Théorie : (2p + 2p = 4p)
Voir livre p. 87.

Exercice 1 : (4 + 5 = 9 points)

1) $\frac{-1-e^{-1-x}}{4+e^{x}}+\frac{1}{4}\leq 0$

C.E. $e^{x}+4\neq 0$ tjs vrai
$dom_{rés}=\mathbb{R}$

$\forall x\in dom_{rés}$,

$\frac{-1-e^{-1-x}}{4+e^{x}}+\frac{1}{4}\leq 0$
$\Leftrightarrow \frac{-4-4e^{-1-x}+4+e^{x}}{4(4+e^{x})}\leq 0 \mid \cdot 4(4+e^{x})>0$
$\Leftrightarrow -4-4e^{-1-x}+4+e^{x}\leq 0$
$\Leftrightarrow 4e^{-1-x}-e^{x}\geq 0 \;\; |\cdot e^{x}>0$
$\Leftrightarrow 4e^{-1}-e^{2x}\geq 0$
$\Leftrightarrow \left(2e^{-\frac{1}{2}}-e^{x}\right)\left(\underbrace{2e^{-\frac{1}{2}}+e^{x}}_{>0}\right)\geq 0$
$\Leftrightarrow -e^{x}\geq -e^{\ln 2-\frac{1}{2}}$
$\Leftrightarrow e^{x}\leq e^{\ln 2-\frac{1}{2}}$
$\Leftrightarrow x\leq \ln 2-\frac{1}{2}$

$\boldsymbol{S}=\left]-\infty;\mathbf{\ln 2}-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right]$

2) $\log_{0,5}(4x^{2}-14)+1\geq 2\cdot\log_{0,5}(x-1)$

C.E. 1) $x-1>0\Leftrightarrow x>1$
2) $4x^{2}-14>0$ racines $x=\pm\frac{\sqrt{14}}{2}$
$\Leftrightarrow x\in\left]-\infty;-\frac{\sqrt{14}}{2}\right[\cup\left]\frac{\sqrt{14}}{2};+\infty\right[$

$dom_{rés}=\left]\frac{\sqrt{14}}{2};+\infty\right[$

$\log_{0,5}(4x^{2}-14)+1\geq 2\cdot\log_{0,5}(x-1)$
$\Leftrightarrow \log_{0,5}(4x^{2}-14)+\log_{0,5}(0,5)\geq \log_{0,5}((x-1)^{2})$
$\Leftrightarrow \log_{0,5}(2x^{2}-7)\geq \log_{0,5}((x-1)^{2})$
$\Leftrightarrow 2x^{2}-7\leq (x-1)^{2}$ (bij. strictement décroissante)
$\Leftrightarrow 2x^{2}-7-x^{2}+2x-1\leq 0$
$\Leftrightarrow x^{2}+2x-8\leq 0$
$\Leftrightarrow (x-2)(x+4)\leq 0$
$\Leftrightarrow -4\leq x\leq 2$

$\boldsymbol{S}=\left]\frac{\sqrt{\mathbf{14}}}{\mathbf{2}};\mathbf{2}\right]$

Exercice 2 : (4 points)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+4}{2x+3}\right)^{x+1}$$
$$=\lim_{x\to+\infty} e^{(x+1)\ln\left(\frac{2x+4}{2x+3}\right)}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\underbrace{(x+1)}_{\to+\infty}\underbrace{\ln\left(\frac{2x+4}{2x+3}\right)}_{\to 0}\ \text{f.i. « } 0\cdot\infty \text{ »}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(\frac{2x+4}{2x+3}\right)}{\frac{1}{x+1}}$$
$$\overset{H}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2x+3}{2x+4}\cdot\frac{2(2x+3)-2(2x+4)}{(2x+3)^2}}{-\frac{1}{(x+1)^2}}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2(x+1)^2}{(2x+4)(2x+3)}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{4x^2}=\frac{1}{2}$$

donc $\underline{\boldsymbol{\lim_{x\to+\infty} e^{(x+1)\ln\left(\frac{2x+4}{2x+3}\right)} = e^{\frac{1}{2}}}}$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+4}{2x+3}\right)^{x+1}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2x+3}\right)^{x+1}\ (*)$$

Posons $y=2x+3 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}y-\frac{3}{2}$,

si $x\to+\infty$, alors $y\to+\infty$

(*) s'écrit :

$$=\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}}$$
$$=\lim_{y\to+\infty}\left[\underbrace{\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}}_{\to e}\right]^{\frac{1}{2}}\left(\underbrace{1+\frac{1}{y}}_{\to 1}\right)^{-\frac{1}{2}}=e^{\frac{1}{2}}$$

donc $\underline{\boldsymbol{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+4}{2x+3}\right)^{x+1}=e^{\frac{1}{2}}}}$

Exercice 3 : (0,5+5+4+4,5+3 = 17 points)

On donne $f : x \mapsto \frac{e^{2x}}{\left(\frac{1}{2}x+1\right)^2}$

i) Domaine :

C.E. $\frac{1}{2}x+1\neq 0$

$dom\ f=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$

ii) Limites :

a) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{\overbrace{e^{2x}}^{\to 0^+}}{\underbrace{\left(\frac{1}{2}x+1\right)^2}_{\to+\infty}}=\mathbf{0^+}$

C_f admet une **A.H. d'équation $y=0$ en $-\infty$**

b) $\displaystyle\lim_{x\to(-2)}\frac{e^{2x}}{\underbrace{\left(\frac{1}{2}x+1\right)^2}_{\to 0^+}}=+\infty$

C_f admet une **A.V. d'équation $x=-2$**

c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\overbrace{e^{2x}}^{\to+\infty}}{\underbrace{\left(\frac{1}{2}x+1\right)^2}_{\to+\infty}}$ f.i. « $\frac{\infty}{\infty}$ »

$\displaystyle\overset{H}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\overbrace{2e^{2x}}^{\to+\infty}}{\underbrace{\frac{1}{2}x+1}_{\to+\infty}}$ f.i. « $\frac{\infty}{\infty}$ »

$\displaystyle\overset{H}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{4e^{2x}}{\frac{1}{2}}=+\infty$ Asymptote oblique possible en $+\infty$

Asymptotes obliques :

<u>Asymptote oblique en +∞</u>

Formules de Cauchy :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{e^{2x}}{\left(\frac{1}{2}x+1\right)^2}}{\underbrace{x}_{\to+\infty}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}}{x\left(\frac{1}{2}x+1\right)^2}\quad \text{f.i. « }\frac{\infty}{\infty}\text{ »}\qquad \text{avec : } x\left(\frac{1}{2}x+1\right)^2=\frac{1}{4}x^3+x^2+x$$

$$\overset{H}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{2e^{2x}}{\frac{3}{4}x^2+2x+1}\quad \text{f.i. « }\frac{\infty}{\infty}\text{ »}$$

$$\overset{H}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{4e^{2x}}{\frac{3}{2}x+2}\quad \text{f.i. « }\frac{\infty}{\infty}\text{ »}$$

$$\overset{H}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{8e^{2x}}{\frac{3}{2}}=+\infty$$

donc C_f admet une **B.P. dans la direction (Oy) en +∞.**

iii) Dérivée première et tableau de variations :

$\forall x\in dom\, f'$,

$$f'(x)=\left(\frac{e^{2x}}{\left(\frac{1}{2}x+1\right)^2}\right)'$$

$$=\frac{2e^{2x}\left(\frac{1}{2}x+1\right)^2-e^{2x}\cdot 2\cdot\left(\frac{1}{2}x+1\right)\cdot\frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}x+1\right)^4}$$

$$=\frac{\left(\frac{1}{2}x+1\right)e^{2x}\left(2\left(\frac{1}{2}x+1\right)-1\right)}{\left(\frac{1}{2}x+1\right)^4}$$

$$=\frac{e^{2x}(x+1)}{\left(\frac{1}{2}x+1\right)^3}$$

Le signe de $f'(x)$ ne dépend que du signe de $\frac{(x+1)}{\left(\frac{1}{2}x+1\right)^3}$.

Tableau de variations :

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
$x+1$		$-$	$\vdots$	$-$	0	$+$	
$\left(\frac{1}{2}x+1\right)^3$		$-$	0	$+$	$\vdots$	$+$	
$f'(x)$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
f	0	$\nearrow$	$+\infty\ \Vert\ +\infty$	$\searrow$	$f(-1)$	$\nearrow$	$+\infty$

C_f admet un minimum local de valeur $f(-1)=\frac{e^{-2}}{\frac{1}{4}}=\frac{4}{e^2}\cong 0{,}5$

iv) Dérivée seconde et concavité :

$$f''(x) = \left(\frac{e^{2x}(x+1)}{\left(\frac{1}{2}x+1\right)^3}\right)'$$

$$= \frac{\left(2e^{2x}(x+1)+e^{2x}\right)\left(\frac{1}{2}x+1\right)^3 - e^{2x}(x+1)3\left(\frac{1}{2}x+1\right)^2\frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}x+1\right)^6}$$

$$= \frac{e^{2x}\left(\frac{1}{2}x+1\right)^2\left[(2(x+1)+1)\left(\frac{1}{2}x+1\right)-(x+1)\cdot 3\cdot\frac{1}{2}\right]}{\left(\frac{1}{2}x+1\right)^6}$$

$$= \frac{e^{2x}\left[(2x+3)\left(\frac{1}{2}x+1\right)-\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}\right]}{\left(\frac{1}{2}x+1\right)^4}$$

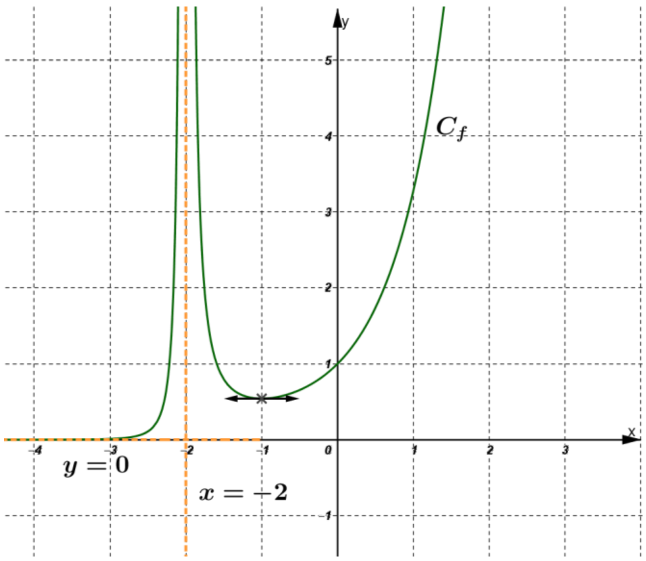
$$= \frac{e^{2x}\left[x^2+\frac{7}{2}x+3-\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}\right]}{\left(\frac{1}{2}x+1\right)^4}$$

$$= \frac{e^{2x}\left[x^2+2x+\frac{3}{2}\right]}{\left(\frac{1}{2}x+1\right)^4} > 0 \qquad \Delta = 4-6<0$$

Tableau de concavité :

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	$\|\|$	$+$	
C_f		$\cup$	$\|\|$	$\cup$	

v) Graphe de C_f



Exercice 4 : (5 + 4 + 5 = 14 points)

1) Soit la fonction f définie par : $f : x \mapsto \frac{12x-2}{(3x^2-x+1)^2}$.

Déterminez la primitive F de f sur $\mathbb{R}$ pour laquelle $F(1) = \frac{4}{3}$.

Primitives de f :

$$\int \frac{12x-2}{(3x^2-x+1)^2}\,dx$$
$$= 2\int \frac{6x-1}{(3x^2-x+1)^2}\,dx$$
$$= -\frac{2}{3x^2-x+1} + k,\ \ k \in \mathbb{R}$$

Les primitives de f sont données par : $F : x \mapsto -\frac{2}{3x^2-x+1} + k,\ \ k \in \mathbb{R}$

$$F(1) = \frac{4}{3}$$
$$\Leftrightarrow -\frac{2}{3} + k = \frac{4}{3}$$
$$\Leftrightarrow k = 2$$

La primitive demandée est :

$$\underline{\boldsymbol{F: x \mapsto -\frac{2}{3x^2-x+1} + 2}}$$

2) Calculez $\int_0^{\frac{5}{4}} \frac{5-4x}{25+16x^2}.\,dx$.

$$\int_0^{\frac{5}{4}} \frac{5-4x}{25+16x^2}.\,dx$$
$$= \int_0^{\frac{5}{4}} \left[\frac{5}{25\left(1+\left(\frac{4}{5}x\right)^2\right)} - \frac{4x}{25+16x^2}\right] dx$$
$$= \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}\int_0^{\frac{5}{4}} \frac{\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{5}}}{1+\left(\frac{4}{5}x\right)^2}\,dx - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{8}}\int_0^{\frac{5}{4}} \frac{8\cdot 4x}{25+16x^2}\,dx$$
$$= \left[\frac{1}{5}\cdot\frac{5}{4}\arctan\left(\frac{4}{5}x\right)\right]_0^{\frac{5}{4}} - \left[\frac{1}{8}\ln|25+16x^2|\right]_0^{\frac{5}{4}}$$
$$= \frac{1}{4}(\arctan(1) - \arctan(0)) - \frac{1}{8}(\ln 50 - \ln 25)$$
$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{4} - \frac{1}{8}\ln 2$$
$$= \underline{\boldsymbol{\frac{\pi}{16} - \frac{1}{8}\ln 2}}$$

3) Calculez $\int e^{-2x}\cos(-2x)\,dx$.

Intégration par parties :

$$u_1'(x)=\cos(2x) \Rightarrow u_1(x)=\frac{1}{2}\sin(2x)$$
$$v_1(x)=e^{-2x} \quad \Rightarrow v_1'(x)=-2e^{-2x}$$

$$\begin{aligned}
I &= \int e^{-2x}\cos(-2x)\,dx \\
&= \int e^{-2x}\cos(2x)\,dx \\
&= \frac{1}{2}e^{-2x}\sin(2x) - \int\left(-e^{-2x}\sin(2x)\right)dx \\
&= \frac{1}{2}e^{-2x}\sin(2x) + \int e^{-2x}\sin(2x)\,dx \\
&= \frac{1}{2}e^{-2x}\sin(2x) - \frac{1}{2}e^{-2x}\cos(2x) - \underbrace{\int e^{-2x}\cos(2x)\,dx}_{=I}
\end{aligned}$$

$$u_2'(x)=\sin(2x) \Rightarrow u_2(x)=-\frac{1}{2}\cos(2x)$$
$$v_2(x)=e^{-2x} \quad \Rightarrow v_2'(x)=-2e^{-2x}$$

$$\Leftrightarrow 2I = \frac{1}{2}e^{-2x}\sin(2x) - \frac{1}{2}e^{-2x}\cos(2x) + k,\ k\in\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \underline{\boldsymbol{I = \frac{1}{4}e^{-2x}(\sin(2x)-\cos(2x)) + k\,,\ k\in\mathbb{R}}}$$

Exercice 5 : (2 + 4 = 6 points)

Soit la fonction f définie par $f : x \mapsto .\frac{2\ln(x)+1}{2\ln(x)-1}$

1) Déterminez le domaine de définition de f .

C.E. (1) $x > 0$

(2) $2\ln(x) - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \ln x \neq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \neq e^{\frac{1}{2}}$

$$dom\ f =]1;+\infty[\ \setminus \left\{e^{\frac{1}{2}}\right\}$$

2) Calculez $f'(x)$ puis une équation de la tangente à la courbe C_f au point d'intersection de C_f avec l'axe des abscisses.

Intersections avec l'axe (Ox) :

$$\begin{aligned}
&f(x) = 0 \\
&\Leftrightarrow 2\ln(x) + 1 = 0 \\
&\Leftrightarrow \ln(x) = -\frac{1}{2} \\
&\Leftrightarrow x = e^{-\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Coordonnées du point d'intersection $I\left(e^{-\frac{1}{2}}\,;0\right)$.

Fonction dérivée :

$dom\ f' = dom\ f$

$\forall x \in dom\ f'$,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{\frac{2}{x}(2\ln(x)-1) - \frac{2}{x}(2\ln(x)+1)}{(2\ln(x)-1)^2} \\
&= -\frac{4}{x(2\ln(x)-1)^2}
\end{aligned}$$

Équation de la tangente au point I :

$$t \equiv y = f'\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)\left(x - e^{-\frac{1}{2}}\right) + f\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)$$

$$f\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) = \frac{2\ln\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)+1}{2\ln\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)-1} = 0$$

$$f'\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) = -\frac{4}{e^{-\frac{1}{2}}\left(2\ln\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)-1\right)^2} = -e^{\frac{1}{2}}$$

donc

$$t \equiv y = -e^{\frac{1}{2}}\left(x - e^{-\frac{1}{2}}\right)$$
$$\Leftrightarrow \underline{\boldsymbol{t \equiv y = -\sqrt{e}x + 1}}$$

Exercice 6 : (6 points)

Calculez, dans un repère orthonormé du plan, l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan délimitée par les graphes des fonctions f et g définies par :

$f : x \mapsto -2x - 1$ et $g : x \mapsto -x^3 + 3x^2 + 8x - 1$.

Abscisses des points d'intersection :

$$\begin{aligned}
& f(x) = g(x) \\
\Leftrightarrow\ & -2x - 1 = -x^3 + 3x^2 + 8x - 1 \\
\Leftrightarrow\ & x^3 - 3x^2 - 10x = 0 \\
\Leftrightarrow\ & x(x^2 - 3x - 10) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & x(x-5)(x+2) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & x = 0 \text{ ou } x = 5 \text{ ou } x = -2
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \left|\int_{-2}^{0}(f(x) - g(x))dx\right| + \left|\int_{0}^{5}(f(x) - g(x))dx\right| \\
&= \left|\int_{-2}^{0}(x^3 - 3x^2 - 10x)dx\right| + \left|\int_{0}^{5}(x^3 - 3x^2 - 10x)dx\right| \\
&= \left|\left[\frac{1}{4}x^4 - x^3 - 5x^2\right]_{-2}^{0}\right| + \left|\left[\frac{1}{4}x^4 - x^3 - 5x^2\right]_{0}^{5}\right| \\
&= |-(4 + 8 - 20)| + \left|\frac{625}{4} - 125 - 125\right| \\
&= 8 + \frac{375}{4} \\
&= \underline{\boldsymbol{\frac{407}{4}}\ \mathbf{u.a.}}
\end{aligned}$$