Corrigé modèle : (1C Math I 2018)

Question 1 :

$$P(z) = z^3 + (5+6i)z^2 + (1+23i)z + 10 + 30i$$

Notons z=ib la solution imaginaire pure cherchée :

$$P(ib) = 0 \Leftrightarrow (ib)^3 + (5+6i)(ib)^2 + (1+23i)(ib) + 10 + 30i = 0$$

$$\Leftrightarrow -ib^3 - 5b^2 - i6b^2 + ib - 23b + 10 + 30i = 0$$

$$\Leftrightarrow -5b^2 - 23b + 10 + i(-b^3 - 6b^2 + b + 30) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -5b^2 - 23b + 10 = 0 & (1) \\ -b^3 - 6b^2 + b + 30 = 0 & (2) \end{cases}$$

$(1) \Rightarrow \Delta = 729 \qquad b_1 = \frac{2}{5} \quad ou \quad b_2 = -5 \qquad S_1 = \{-5; \frac{2}{5}\}$

En remplaçant b=-5 dans (2) :125-150-5+30=0, la solution imaginaire pure cherchée est donc z=-5i.

Le polynôme P(z) est divisible par z+5i :

Horner :

	1	5+6i	1+23i	10+30i
-5i		-5i	5-25i	-10-30i
	1	5+i	6-2i	ouf

On en déduit : $P(z) = (1+5i)\underbrace{(z^2 + (5+i)z + 6 - 2i)}_{Q(z)}$

Résolvons : $Q(z) = 0 \Leftrightarrow z^2 + (5+i)z + 6 - 2i = 0 \qquad \Delta = (5+i)^2 - 4(6-2i)$

$$\Delta = 25 + 10i - 1 - 24 + 8i$$

$\Delta = 18i = 0 + 18i$

$\mathrm{r = x + iy}$ est une rcc. de $\Delta \Leftrightarrow r^2 = \Delta$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 0 & (1) \\ 2xy = 18 & (2) \Rightarrow x\ et y\ sont\ de\ même\ signe \\ x^2 + y^2 = 18 & (3) \end{cases}$$

$(1) + (3): 2x^2 = 18 \Leftrightarrow x = -3\ ou\ x = 3 \qquad (3) - (1): 2y^2 = 18 \Leftrightarrow y = -3\ ou\ y = 3$

Les deux rcc. de Δ s'écrivent : $r_1 = -3 - 3i \quad et \quad r_2 = 3 + 3i$

Finalement les deux solutions complexes de $Q(z) = 0$ sont :

$z_1 = \frac{-5-i-3-3i}{2} = -4 - 2i$ *et* $z_2 = \frac{-5-i+3+3i}{2} = -1 + i$

Et $S_{\mathbb{C}} = \{-5i; -4 - 2i; -1 + i\}$

Question 2 :

1)

- forme algébrique de $z_1 = \frac{\sqrt{3}+2+(2\sqrt{3}+3)i}{1+\sqrt{3}i} \cdot \frac{1-\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i} - \frac{5}{2+i} \cdot \frac{2-i}{2-i}$

$$z_1 = \frac{\sqrt{3}+2+\sqrt{3}(2\sqrt{3}+3)+i[-\sqrt{3}(\sqrt{3}+2)+(2\sqrt{3}+3)]}{1+3} - \frac{10-5i}{4+1}$$

$$z_1 = \frac{8+4\sqrt{3}+i(0)}{4} - (2 - i) = 2 + \sqrt{3} - 2 + i$$

$\boxed{z_1 = \sqrt{3} + i}$

- forme trigonométrique de $z_1 = 2\left(\underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2}}_{\cos\alpha>0} + i \underbrace{\frac{1}{2}}_{\sin\alpha>0}\right)$ premier quadrant : $\alpha = \frac{\pi}{6}$

$\boxed{z_1 = 2cis(\frac{\pi}{6})}$

- forme algébrique de $z_2 = \frac{2}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i}$**=1-i**

$\boxed{z_2 = 1 - i}$

- forme trigonométrique de $z_2 = \sqrt{2}\left(\underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2}}_{\cos\alpha>0} + i \underbrace{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}_{\sin\alpha<0}\right)$ quatrième quadrant : $\alpha = -\frac{\pi}{4}$

$\boxed{z_2 = \sqrt{2}cis(-\frac{\pi}{4})}$

2)

- forme algébrique de $Z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{3}+i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} = \frac{\sqrt{3}-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}+1}{2}$
- forme trigonométrique de $Z = \frac{2cis\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\sqrt{2}cis\left(-\frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt{2}cis\left(\frac{5\pi}{12}\right)$

3) On en déduit : $\begin{cases} \sqrt{2} \cdot \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \\ \sqrt{2} \cdot \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}+1}{2} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \\ \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\boxed{\Leftrightarrow \begin{cases} \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \\ \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \end{cases}}$$

Question 3 :

$$\begin{cases} x + m \cdot y + m \cdot z & = 2 + m \quad (1) \\ -m \cdot x + 2y + 3z & = 1 - m \quad (2) \\ m \cdot x + +m \cdot y + +m \cdot z & = \quad m \quad (3) \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & m & m \\ -m & 2 & 3 \\ m & m & m \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & m \\ -m & 2 \\ m & m \end{matrix} = 2m + 3m^2 - m^3 - 2m^2 - 3m + m^3$$

$$\boxed{\boldsymbol{\Delta = -m + m^2 = m(m-1)}}$$

1) Le système admet une solution unique si et seulement si $\Delta \neq 0 \Leftrightarrow \mathrm{m} \neq 0$ et $\mathrm{m} \neq 1$.
   Le système admet une solution unique pour tout $m \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}$.

2)

- Résolution pour m=0 : Le système s'écrit :

$$\begin{cases} x = 2 & (1) \\ 2y + 3z = 1 & (2) \\ 0 = 0 & (3) \end{cases}$$

(2) :$y = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}z$

$S = \left\{\left(2; \frac{1}{2} - \frac{3}{2}z; z\right); z \in \mathbb{R}\right\}$ Le système admet une infinité de solutions qui sont alignés sur la droite d passant par le point A(2 ; $\frac{1}{2}$;0) et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$.

- Résolution pour m=1 : Le système s'écrit : $\begin{cases} x + y + z = 3 & (1) \\ -x + 2y + 3z = 0 & (2) \\ x + y + z = 1 & (3) \end{cases}$

(1) : $x + y + z = 3$ et (2) : $x + y + z = 1$ contradiction

$S = \emptyset$ Les trois plans n'ont pas d'intersection.

- Résolution pour m=-1 : Le système s'écrit : $\begin{cases} x - y - z = 1 & (1) \\ x + 2y + 3z = 2 & (2) \\ -x - y - z = -1 & (3) \end{cases}$

Éliminons x entre (1) et (2) : (2)-(1) : 3y+4z=1 (3)

Éliminons x entre (1) et (3) : (1)+(3) : -2y-2z=0 (4)

(3)+2(4) : -y=1$\Leftrightarrow y = -1$.

En rempl. y=-1 dans (3) on obtient : 4z=4⟺ $z = 1$.

En rempl. y=-1 et z=1 dans (1) on obtient : x=1.

S={(1 ;-1 ;1)} solution unique, les trois plans se coupent au point I(1 ;-1 ;1).

Question 4 :

1) $\Pi: x - y + 2z - 3 = 0 \quad \textit{vecteur normal } \vec{n}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$d \perp \Pi \Leftrightarrow \vec{n}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \textit{ est un vecteur directeur de } d$

On en déduit un système d'éq. paramétriques de d: $\begin{cases} x = 1 + k & (1) \\ y = -1 - k & (2) (k \in \mathbb{R}) \\ z = 1 + 2k & (3) \end{cases}$

2)

a) A(1 ;-1 ;2) $\in d \Leftrightarrow$ *il existe un nombre réel k tel que* $\begin{cases} 1 = -6 + 3 \cdot k & \Leftrightarrow k = \frac{7}{3} \\ -1 = -2 + 2 \cdot k & \Leftrightarrow k = \frac{1}{2} \\ 2 = 6 - 4 \cdot k & \Leftrightarrow k = 1 \end{cases}$

Donc $A \notin d$.

b) *Le vecteur directeur* $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ *de d est aussi un vecteur directeur de P.*

$B(-6;-2;6) \in d \subset P \textit{ donc } \vec{v} = \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -7 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \textit{ est un autre vecteur directeur de } P.$

$M(x, y, z) \in P \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}; \vec{u}; \vec{v}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & 3 & -7 \\ y+1 & 2 & -1 \\ z-2 & -4 & 4 \end{vmatrix} = 0$

Finalement $P : 4x + 16y + 11z - 10 = 0$

Question 5 :

1) $\left(2x^2 - \frac{1}{4x}\right)^8 = \sum_{k=0}^{8} C_8^k (2x^2)^{8-k} \cdot \left(-\frac{1}{4x}\right)^k$

$= \sum_{k=0}^{8} C_8^k (-1)^k \cdot 2^{8-k} \cdot x^{16-2k} \cdot 2^{-2k} \cdot x^{-k}$

$= \sum_{k=0}^{8} C_8^k (-1)^k \cdot 2^{8-3k} \cdot x^{16-3k}$

Cond. : (pour obtenir le terme en x^7) $16 - 3k = 7 \Leftrightarrow \mathbf{k = 3}$

Le terme en x^7 s'écrit : $C_8^3 (-1)^3 \cdot 2^{-1} \cdot x^7 = -\frac{56}{2} x^7 = \mathbf{-28x^7}$.

2)

<u>Solution de l'alternative proposée</u>

$$\text{a) } p(S_0)=\frac{\overbrace{\boxed{C_6^5}}^{\text{choix pour tirer 5 boules numérotées }\boxed{0}\text{ parmi 6}}}{\underbrace{\boxed{C_{12}^5}}_{\text{choix pour tirer 5 boules parmi 12}}}=\frac{6}{792}=\boxed{\frac{1}{132}}$$

$$\text{b) } p(S_7)=\frac{\overbrace{\boxed{C_2^2}}^{\text{choix pour tirer 2 boules numérotées }\boxed{2}\text{ parmi 2}}\cdot\overbrace{\boxed{C_4^3}}^{\text{choix pour tirer 3 boules numérotées }\boxed{1}\text{ parmi 4}}}{\underbrace{\boxed{C_{12}^5}}_{\text{choix pour tirer 5 boules parmi 12}}}=\frac{4}{792}=\boxed{\frac{1}{198}}$$

$$\text{c) } p(S_5)=\frac{\overbrace{\boxed{C_2^2}}^{\text{choix pour tirer 2 boules numérotées }\boxed{2}\text{ parmi 2}}\cdot\overbrace{\boxed{C_4^1}}^{\text{choix pour tirer 1 boule numérotée }\boxed{1}\text{ parmi 4}}\cdot\overbrace{\boxed{C_6^2}}^{\text{choix pour tirer 2 boules numérotées }\boxed{0}\text{ parmi 6}}+\overbrace{\boxed{C_2^1}}^{\text{choix pour tirer 1 boule numérotée }\boxed{2}\text{ parmi 2}}\cdot\overbrace{\boxed{C_4^3}}^{\text{choix pour tirer 3 boules numérotées }\boxed{1}\text{ parmi 4}}\cdot\overbrace{\boxed{C_6^1}}^{\text{choix pour tirer 1 boule numérotée }\boxed{0}\text{ parmi 6}}}{\underbrace{\boxed{C_{12}^5}}_{\text{choix pour tirer 5 boules parmi 12}}}=\frac{108}{792}=\boxed{\frac{3}{22}}$$

d) S_n est impair si et seulement si le nombre de boules numérotées $\boxed{1}$ est impair, ce qui est le cas lorsqu'on tire 1 boule numérotée $\boxed{1}$ ou 3 boules numérotées $\boxed{1}$.

$$p(S_1\cup S_3\cup S_5\cup S_7)=\frac{\overbrace{\boxed{C_4^1}}^{\text{choix pour tirer 1 boule numérotée }\boxed{1}\text{ parmi 4}}\cdot\overbrace{\boxed{C_8^4}}^{\text{choix pour tirer 4 boules numérotées }\boxed{0}\text{ ou }\boxed{2}\text{ parmi 8}}+\overbrace{\boxed{C_4^3}}^{\text{choix pour tirer 3 boules numérotées }\boxed{1}\text{ parmi 4}}\cdot\overbrace{\boxed{C_8^2}}^{\text{choix pour tirer 2 boules numérotées }\boxed{0}\text{ ou }\boxed{2}\text{ parmi 8}}}{\underbrace{\boxed{C_{12}^5}}_{\text{choix pour tirer 5 boules parmi 12}}}=\boxed{\frac{49}{99}}$$

$$p(S_0\cup S_2\cup S_4\cup S_6)=1-p(S_1\cup S_3\cup S_5\cup S_7)=1-\tfrac{49}{99}=\boxed{\tfrac{50}{99}}$$

Pas demandé!

$$p(S_1)=\frac{C_4^1\cdot C_6^4}{C_{12}^5}=\frac{60}{792}=\frac{5}{66}$$

$$p(S_2)=\frac{C_2^1\cdot C_6^4+C_4^2\cdot C_6^3}{C_{12}^5}=\frac{150}{792}=\frac{25}{132}$$

$$p(S_3)=\frac{C_2^1\cdot C_4^1\cdot C_6^3+C_4^3\cdot C_6^2}{C_{12}^5}=\frac{220}{792}=\frac{5}{18}$$

$$p(S_4)=\frac{C_2^2\cdot C_6^3+C_2^1\cdot C_4^2\cdot C_6^2+C_4^4\cdot C_6^1}{C_{12}^5}=\frac{206}{792}=\frac{103}{396}$$

$$p(S_6)=\frac{C_2^2\cdot C_4^2\cdot C_6^1+C_2^1\cdot C_4^4}{C_{12}^5}=\frac{38}{792}=\frac{19}{396}$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7
$p(S_n)$	$\frac{1}{132}$	$\frac{5}{66}$	$\frac{25}{132}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{103}{396}$	$\frac{3}{22}$	$\frac{19}{396}$	$\frac{1}{198}$

$$p(S_1\cup S_3\cup S_5\cup S_7)=\tfrac{5}{66}+\tfrac{5}{18}+\tfrac{3}{22}+\tfrac{1}{198}=\tfrac{49}{99}$$

$$p(S_0\cup S_2\cup S_4\cup S_6)=\tfrac{1}{132}+\tfrac{25}{132}+\tfrac{103}{396}+\tfrac{19}{396}=\tfrac{50}{99}$$