

Partie I

Question 1 - (8 points)

$$\begin{cases} \frac{x-1}{2} - \frac{x-1+z-y}{5} + \frac{z}{10} = 0 & E_1 \\ 5y = 2(2+x+2y) - 3(z+1) & E_2 \\ 4x - 2y = -2 + 6z & E_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5(x-1) - 2(x-1+z-y) + z = 0 & E_1 \leftarrow 10E_1 \\ 5y = 4 + 2x + 4y - 3z - 3 \\ 4x - 2y - 6z = -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x - 5 - 2x + 2 - 2z + 2y + z = 0 \\ -2x + y + 3z = 1 \\ 4x - 2y - 6z = -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2y - z = 3 \\ -2x + y + 3z = 1 \\ 4x - 2y - 6z = -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2y - z = 3 \\ 7x - 7z = 1 & E_2 \leftarrow E_1 - 2E_2 \\ 7x - 7z = 1 & E_3 \leftarrow E_1 + E_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2y - z = 3 \\ 7x - 7z = 1 \\ 0x = 0 & E_3 \leftarrow E_2 - E_3 \end{cases}$$

Le système est simplement indéterminé. Posons  $x = r$  avec  $r \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 3 \\ -7z = 1 - 7r \\ x = r \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2y - z = 3 \\ z = -\frac{1}{7} + r \\ x = r \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{10}{7} - r \\ z = -\frac{1}{7} + r \\ x = r \end{cases}$$

Ainsi,  $\mathcal{S} = \left\{ \left( r; \frac{10}{7} - r; -\frac{1}{7} + r \right), r \in \mathbb{R} \right\}$

En posant  $y = r$ , on obtient  $\mathcal{S} = \left\{ \left( \frac{10}{7} - r; r; \frac{9}{7} - r \right), r \in \mathbb{R} \right\}$

En posant  $z = r$ , on obtient  $\mathcal{S} = \left\{ \left( \frac{1}{7} + r; \frac{9}{7} - r; r \right), r \in \mathbb{R} \right\}$

---

**Question 2** - (9 points = 6+3)

1. Equation réduite de (AE)

Comme  $x_A = x_E = -2$ ,  $(AE) \equiv x = -2$

Equation réduite de (DE)

Comme  $y_D = y_E = -\frac{3}{2}$ ,  $(DE) \equiv y = -\frac{3}{2}$

Equation réduite de (BC)

Comme  $x_B \neq x_C$ , l'équation est de la forme  $y = ax + b$

- $a = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{\frac{3}{2} - \frac{9}{2}}{3 - \frac{3}{2}} = -2$

- $C \left( 3; \frac{3}{2} \right) \in (BC) \Leftrightarrow y_C = -2x_C + b$   
 $\Leftrightarrow \frac{3}{2} = -6 + b$

$\Leftrightarrow b = \frac{15}{2}$       Ainsi  $(BC) \equiv y = -2x + \frac{15}{2}$

### Equation réduite de (AB)

Comme  $x_B \neq x_A$ , l'équation est de la forme  $y = cx + d$

$$\bullet c = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\frac{9}{2} - \frac{7}{2}}{\frac{3}{2} - (-2)} = \frac{2}{7}$$

$$\bullet A \left(-2 ; \frac{7}{2}\right) \in (AB) \Leftrightarrow y_A = \frac{2}{7}x_A + d$$
$$\Leftrightarrow \frac{7}{2} = -\frac{4}{7} + d$$

$$\Leftrightarrow d = \frac{57}{14}$$

$$\text{Ainsi } (AB) \equiv y = \frac{2}{7}x + \frac{57}{14}$$

### Equation réduite de (CD)

Comme  $x_C \neq x_D$ , l'équation est de la forme  $y = mx + p$

$$\bullet m = \frac{y_C - y_D}{x_C - x_D} = \frac{\frac{3}{2} - (-\frac{3}{2})}{3 - \frac{1}{2}} = \frac{6}{5}$$

$$\bullet C \left(3 ; \frac{3}{2}\right) \in (CD) \Leftrightarrow y_C = \frac{6}{5}x_C + p$$
$$\Leftrightarrow \frac{3}{2} = \frac{18}{5} + p$$

$$\Leftrightarrow p = -\frac{21}{10}$$

$$\text{Ainsi } (CD) \equiv y = \frac{6}{5}x - \frac{21}{10}$$

Système d'inéquations :

$$\begin{cases} x \geq -2 \\ y \geq -\frac{3}{2} \\ y \leq -2x + \frac{15}{2} \\ y \leq \frac{2}{7}x + \frac{57}{14} \\ y \geq \frac{6}{5}x - \frac{21}{10} \end{cases}$$

2.  $f(x; y) = 9x + 5y$

Soit la droite  $d_0 \equiv 9x + 5y = 0$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{9}{5}x$$

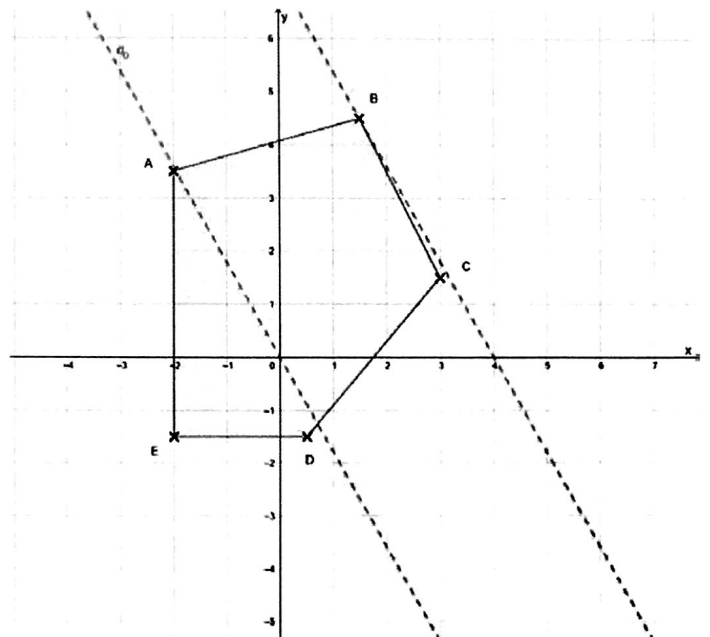
Le maximum se trouve au point B

et ce maximum vaut :

$$f\left(\frac{3}{2}; \frac{9}{2}\right) = 9 \cdot \frac{3}{2} + 5 \cdot \frac{9}{2}$$

$$= \frac{27}{2} + \frac{45}{2}$$

$$= 36$$



## Partie II

### Question 3 - (15 points = (1+5)+(1,5+4,5)+3)

1. a)  $C(q) = q^2 - 10q + 361$  avec  $q \in [1; 200]$

$$C_m(q) = \frac{C(q)}{q} = q - 10 + \frac{361}{q}$$

b) Etudions la fonction  $C_m$  :

$$C'_m(q) = 1 - \frac{361}{q^2} = \frac{q^2 - 361}{q^2}$$

Racines de  $C'_m$  :

$$C'_m(q) = 0 \Leftrightarrow q^2 - 361 = 0$$

$$\Leftrightarrow q = 19 \text{ ou } q = -19$$

$q$	1	19	200
$C'_m(q)$	-	0	+
$C_m(q)$	352		$\frac{38361}{200}$

↘ 28 ↗

L'entreprise doit fabriquer 19 robes pour obtenir un coût unitaire moyen minimal de 28 €.

2. a)  $B(q) = 150q - C(q) = 150q - q^2 + 10q - 361 = -q^2 + 160q - 361$

b) Etudions la fonction  $B$  :

$$B'(q) = -2q + 160$$

Racines de  $B'$  :

$$B'(q) = 0 \Leftrightarrow -2q + 160 = 0$$

$$\Leftrightarrow q = 80$$

$q$	1	80	200
$B'(q)$	+	0	-
$B(q)$	-202	6039	-8361

Pour obtenir un bénéfice maximal de 6 039 €, l'entreprise doit produire et vendre 80 robes.

c) L'entreprise ne fait aucune perte si son bénéfice est positif. Etudions les racines puis le signe de la fonction  $B$  :

$$B(q) = 0 \Leftrightarrow -q^2 + 160q - 361 = 0$$

$$\Delta = 160^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-361) = 24\,156$$

$$q_1 = 80 + 3\sqrt{671} \approx 157,7$$

$$q_2 = 80 - 3\sqrt{671} \approx 2,29$$

$q$	1	$80 - 3\sqrt{671}$	$80 + 3\sqrt{671}$	200	
$B(q)$	-	0	+	0	-

Pour ne pas faire de pertes, la production et la vente doivent être comprises entre 3 et 157 robes.

Question 4 - (9 points = (3+3)+(1,5+1,5))

---

1. Equations :

a)  $3 \cdot 7^{2-x} - 7 = 8 - 2 \cdot 7^{2-x}$

$$\Leftrightarrow 5 \cdot 7^{2-x} = 15$$

$$\Leftrightarrow 7^{2-x} = 3$$

$$\Leftrightarrow 7^{2-x} = 7^{\log_7 3}$$

$$\Leftrightarrow 2 - x = \log_7 3$$

$$\Leftrightarrow x = 2 - \log_7 3 \quad \text{Ainsi, } \mathcal{S} = \{2 - \log_7 3\}$$

b)  $4 + \log_5(-1 - 3x) = 7$

$$\text{CE: } -1 - 3x > 0 \Leftrightarrow x < -\frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow \log_5(-1 - 3x) = 3$$

$$\Leftrightarrow \log_5(-1 - 3x) = \log_5 5^3$$

$$\Leftrightarrow -1 - 3x = 5^3$$

$$\Leftrightarrow -1 - 3x = 125$$

$$\Leftrightarrow 3x = -126$$

$$\Leftrightarrow x = -42 \quad \text{Ainsi, } \mathcal{S} = \{-42\}$$

2.  $\log a = 2$  et  $\log b = -3$

a)  $\log(ab)^3 = 3 \cdot \log(ab)$   
 $= 3(\log a + \log b)$   
 $= 3(2 - 3)$   
 $= -3$

b)  $\log \sqrt{\frac{a}{b}} = \log \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}}$   
 $= \frac{1}{2} \log \left(\frac{a}{b}\right)$   
 $= \frac{1}{2}(\log a - \log b)$   
 $= \frac{1}{2}(2 + 3)$   
 $= \frac{5}{2}$

### Partie III

#### Question 5 - (10 points = 4+(2+2+2))

1. Tableau :

	Allemande	Française	Japonaise	Total
Femme	9 %	21,12 %	20,8 %	50,92 %
Homme	33,4 %	5,28 %	10,4 %	49,08 %
Total	42,4 %	26,4 %	31,2 %	100 %

2. a)  $p(\text{homme et française}) = 5,28 \%$

b)  $p(\text{femme sachant allemande}) = \frac{9}{42,4} = \frac{45}{212} \approx 21,22 \%$

c)  $p(\text{allemande sachant homme}) = \frac{33,4}{49,08} = \frac{835}{1227} \approx 68,05 \%$

#### Question 6 - (9 points = (3+2)+(2+2))

1. a) Il faut distinguer les cas :

- 3 cœurs non valet et 1 valet non cœur :  $C_{12}^3 \cdot C_3^1 = 660$

- 2 cœurs non valet et 1 valet de cœur et aucun autre valet et 1 autre carte

(ni valet ni cœur) :  $C_{12}^2 \cdot C_1^1 \cdot C_3^0 \cdot C_{36}^1 = 2\,376$

Ainsi,  $p(\text{tirer exactement 3 cœurs et un valet}) = \frac{660+2376}{270\,725} = \frac{3\,036}{270\,725} \approx 1,12 \%$

b)  $p(\text{tirer au moins une dame}) = 1 - p(\text{ne tirer aucune dame})$

$$= 1 - \frac{C_4^0 \cdot C_{48}^4}{C_{52}^4} = 1 - \frac{194580}{270725} = \frac{15\,229}{54\,145} \approx 28,13 \%$$

2. a) 4 cartes successivement et sans remise → Arrangements sans répétition

$$p(\text{tirer 4 trèfles}) = \frac{A_{13}^4}{A_{52}^4} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10}{6\,497\,400} = \frac{17\,160}{6\,497\,400} = \frac{11}{4165} \approx 0,26 \%$$

b)  $p(\text{tirer un roi suivi d'une dame sachant que les deux premières cartes sont des rois})$

$$= \frac{2}{50} \cdot \frac{4}{49} = \frac{4}{1225} \approx 0,33 \%$$