LE GOUVERNEMENT
DU GRAND-DUCHÉ DE LUXEMBOURG
Ministère de l'Éducation nationale,
de l'Enfance et de la Jeunesse

EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES CLASSIQUES
2019

BRANCHE	SECTION(S)	ÉPREUVE ÉCRITE	
MATHEMATIQUES I	**B**	*Durée de l'épreuve :*	180 minutes
		Date de l'épreuve :	24/05/2019

Question I (9 + 5 + 3 = 17 points)

1. Résolvez dans $\mathbb{C}$ et donnez les solutions sous forme trigonométrique :
$\frac{1}{2}z^6+(1+3i)z^3+8+8i=0$.

2. On donne le nombre complexe $Z=\frac{z+2}{1+iz}$, avec $z\in\mathbb{C}\setminus\{i\}$ et $z=x+iy, x, y\in\mathbb{R}$.
Dans le plan de Gauss, déterminez l'ensemble E défini par $E=\{M(z)|Z\in\mathbb{R}\}$.

3. On considère le point A d'affixe $z_A=-4-i$, le point B d'affixe $z_B=5-4i$ et le point C d'affixe $z_C=2+2i$. Représentez les points A, B et C dans le plan de Gauss et calculez les mesures des angles du triangle ABC.

Question II ((6 + 6) + 3 = 15 points)

1. Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Une urne contient k boules noires et 3 boules blanches, toutes indiscernables au toucher.
Une partie consiste à prélever au hasard successivement et avec remise deux boules dans cette urne. On établit la règle du jeu suivante :
   - un joueur perd 9 euros si les deux boules tirées sont de couleur blanche ;
   - un joueur perd 1 euro si les deux boules tirées sont de couleur noire ;
   - un joueur gagne 5 euros si les deux boules tirées sont de couleurs différentes ; on dit dans ce cas-là qu'il gagne la partie.

   a) Un joueur joue une partie.
   On note X la variable aléatoire égale au gain (positif ou négatif) du joueur.
   i) Exprimez la loi de probabilité de X en fonction de k.
   ii) Déterminez les valeurs de k pour lesquelles le jeu est favorable au joueur.

   b) On pose maintenant $k=7$.
   On note Y la variable aléatoire qui comptabilise le nombre de parties gagnées par le joueur.
   i) Un joueur joue 5 parties identiques et indépendantes.
   Calculez la probabilité pour que le joueur gagne au moins une fois.
   ii) Déterminez le nombre minimal de parties que le joueur doit jouer afin que la probabilité de gagner au moins une fois soit supérieure à 99 %.

2. Au poker, on dispose d'un jeu de 32 cartes.
Calculez la probabilité d'obtenir une double paire, c'est-à-dire deux paires (de valeurs différentes, sinon il s'agit d'un carré) et une autre carte.

Question III ((7 + 3 + 1) + 3 = 14 points)

On suppose que le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. a) Identifiez la courbe Γ dont une équation cartésienne est
   $25x^2 - 100x + 9y^2 - 18y - 116 = 0$.
   Précisez l'équation réduite dans un repère dont l'origine est le centre Ω de Γ.
   Déterminez les éléments caractéristiques (axe focal, excentricité, sommet(s), foyer(s), directrice(s), asymptotes éventuelles) et représentez la courbe dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.
   b) Déterminez dans $(O,\vec{i},\vec{j})$ les équations des tangentes aux points de Γ dont l'ordonnée dans $(O,\vec{i},\vec{j})$ est égale à 5.
   c) Vérifiez que le point d'intersection de ces deux tangentes appartient à une des directrices de Γ.

2. Trouvez une équation cartésienne des coniques à centre O(0,0) dont la distance focale vaut 20 et dont les asymptotes sont perpendiculaires.

Question IV (14 points)

On considère un rectangle ACDF dont la longueur AC est le double de la largeur. B et E sont les milieux respectifs de [AC] et de [FD].

Un point Q est variable sur la demi-droite [BE). On reporte la longueur BQ sur [DE) de telle sorte que DP = BQ.

Déterminez et tracez le lieu L du point I, intersection des droites (AQ) et (CP).