EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES CLASSIQUES
2019
CORRIGÉ – BARÈME

BRANCHE	SECTION(S)	ÉPREUVE ÉCRITE	
Mathématiques 2	B	*Durée de l'épreuve :*	240 minutes
		Date de l'épreuve :	20/05/2019

Question 1

a)

$$(m+3)\left(\frac{1}{2}\right)^x + (m-3)\left(\frac{1}{4}\right)^x = -8(m-4) \quad (E_1)$$

$$\Leftrightarrow (m-3)\left(\frac{1}{2}\right)^{2x} + (m+3)\left(\frac{1}{2}\right)^x + 8(m-4) = 0$$

$$\Leftrightarrow (m-3)y^2 + (m+3)y + 8(m-4) = 0 \quad (E_2)$$

$$\left(\text{en posant } y = \left(\frac{1}{2}\right)^x > 0\right)$$ **(1 pt)**

$\boxed{\text{Si } m = 3 :}$

$(E_2) \Leftrightarrow 6y - 8 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{4}{3} > 0$

L'équation E_1 admet une seule solution. **(0,5 pt)**

Si $m \neq 3, E_2$ est une équation du 2^{nd} degré en y.
On a :

$$\begin{aligned}\Delta &= (m+3)^2 - 4(m-3)\cdot 8(m-4)\\ &= m^2 + 6m + 9 - 32(m^2 - 7m + 12)\\ &= m^2 + 6m + 9 - 32m^2 + 224m - 384\\ &= -31m^2 + 230m - 375\end{aligned}$$

$$\Delta_m = 230^2 - 4\cdot 31\cdot 375 = 6400 = 80^2 > 0$$

$$m_1 = \frac{-230-80}{-62} = 5$$ **(1,5 pt)**

$$m_2 = \frac{-230+80}{-62} = \frac{75}{31} \approx 2{,}42$$

$\boxed{\text{Si } m = 5 :}$

$\Delta = 0\,;\, y_0 = -\frac{m+3}{2(m-3)} = -\frac{8}{4} = -2 \leq 0$

L'équation E_1 n'admet aucune solution. **(0,5 pt)**

$\boxed{\text{Si } m = \frac{75}{31} :}$

$$\Delta = 0\,;\, y_0 = -\frac{m+3}{2(m-3)} = -\frac{\frac{168}{31}}{-\frac{36}{31}} = \frac{14}{3} > 0$$

L'équation E_1 admet une seule solution. **(0,5)**

$\boxed{\text{Si } m \in \left]\frac{75}{31}\,;3\right[\cup \left]3\,;5\right[:}$

$\Delta > 0$. L'équation E_2 admet deux solutions distinctes.
Notons P le produit et S la somme des deux solutions.

On a :

$$P = \frac{c}{a} = \frac{8(m-4)}{m-3}$$ **(1 pt)**

$$S = -\frac{b}{a} = \frac{-m-3}{m-3}$$

m	$-\infty$		-3		$\frac{75}{31}$		3		4		5		$+\infty$
Δ		$-$	$-$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	
P					$\Vert$	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$		
S					$\Vert$	$+$	$\Vert$	$-$	$-$	$-$	$\Vert$		
sol. E_2		0	0	0	1	2	1	2	2	2	1	0	
sol. E_1		0	0	0	1	2	1	1	0	0	0	0	

(2 pt)

<u>Conclusion :</u>

Si $m \in \left]\frac{75}{31}\,;3\right[$, l'équation E_1 admet 2 solutions.

Si $m \in \left\{\frac{75}{31}\right\} \cup [3\,;4[$, l'équation E_1 admet 1 solution.

Si $m \in \left]-\infty\,;\frac{75}{31}\right[\cup [4\,;+\infty[$, l'équation E_1 n'admet aucune solution. **(1 pt)**

b)

Pour $m = \frac{5}{2}$, l'équation E_2 admet deux solutions distinctes.
On a :

$$\Delta = -31\left(\frac{5}{2}\right)^2 + 230\cdot\frac{5}{2} - 375 = \frac{25}{4}$$

$$y_1 = \frac{-\left(\frac{5}{2}+3\right) - \frac{5}{2}}{2\left(\frac{5}{2}-3\right)} = \frac{-8}{-1} = 8$$

$$y_2 = \frac{-\left(\frac{5}{2}+3\right) + \frac{5}{2}}{2\left(\frac{5}{2}-3\right)} = \frac{-3}{-1} = 3$$ **(1 pt)**

Revenons à la variable x :

$$\begin{aligned} & y = 8\\ \Leftrightarrow\ & \left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{2}} 8}\\ \Leftrightarrow\ & x = \log_{\frac{1}{2}} 8 \quad (\text{car } \exp_{\frac{1}{2}} \text{ est une bijection})\\ \Leftrightarrow\ & x = -\log_2 2^3\\ \Leftrightarrow\ & x = -3\end{aligned}$$ **(1 pt)**

$$y = 3$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{2}} 3}$$
$$\Leftrightarrow \quad x = \log_{\frac{1}{2}} 3 \quad (\text{car } \exp_{\frac{1}{2}} \text{ est une bijection})$$
$$\Leftrightarrow \quad x = -\log_2 3 \quad (\approx -1{,}58)$$ **(1 pt)**

Ensemble de solutions de E_1 pour $m = \frac{5}{2}$:

$$\boxed{S = \{-3\,; -\log_2 3\}}$$

c)

En posant $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x > 0$, on obtient :

$$-\frac{1}{2}y^2 + \frac{11}{2}y - 12 < 0 \quad (I_2)$$

Les racines du 1er membre sont 3 et 8 (voir b)).

Tableau des signes :

y	0		3		8		$+\infty$
Signe du 1er membre	||	-	0	+	0	-	

Donc :

$(I_2) \Leftrightarrow 0 < y < 3$ ou $y > 8$ **(1 pt)**

Puisque $\exp_{\frac{1}{2}}$ est une bijection <u>strictement décroissante</u>, on a :

$0 < y < 3 \Leftrightarrow x > -\log_2 3$

$y > 8 \Leftrightarrow y < -3$ **(1,5 pt)**

L'ensemble des solutions de l'inéquation en x est alors :

$\boxed{S =]-\infty\,; -3[\, \cup \,]-\log_2 3\,; +\infty[}$ **(0,5 pt)**

(8+3+3) 14 points

Question 2

$$f(x) = \ln[(x+3)e^{x-1}] - \frac{1}{2}\ln x^2$$

a)

CE :

α) $(x+3)\underbrace{e^{x-1}}_{>0} > 0 \Leftrightarrow x + 3 > 0 \Leftrightarrow x > -3$

β) $x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$

$\boxed{\text{dom} f =]-3\,; +\infty[\setminus\{0\} = \text{dom}_c f}$ **(0,5 pt)**

b)

$\forall x \in \text{dom} f$: **(0,5 pt)**

$$f(x) = \ln(x+3) + \ln e^{x-1} - \frac{1}{2}\cdot 2\ln|x|$$
$$= x - 1 + \ln(x+3) - \ln|x|$$

c)

$$\lim_{x\to(-3)^+} f(x)$$
$$= \lim_{x\to(-3)^+}\left[\underbrace{x-1}_{\to -4} + \underbrace{\ln(x+3)}_{\to -\infty} - \underbrace{\ln|x|}_{\to \ln 3}\right]$$
$$= -\infty$$

$\boxed{\mathcal{C}_f \text{ admet une A.V. } v_1 \equiv x = -3}$ **(1 pt)**

$$\lim_{x\to 0} f(x)$$
$$= \lim_{x\to 0}\left[\underbrace{x-1}_{\to -1} + \underbrace{\ln(x+3)}_{\to \ln 3} - \underbrace{\ln|x|}_{\to -\infty}\right]$$
$$= +\infty$$

$\boxed{\mathcal{C}_f \text{ admet une A.V. } v_2 \equiv x = 0}$ **(1 pt)**

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\underbrace{x-1}_{\to+\infty} + \underbrace{\ln(x+3)}_{\to+\infty} - \underbrace{\ln|x|}_{\to+\infty}\right] \quad (\text{F.I.}: \infty - \infty)$$
$$= \lim_{x\to+\infty}[x - 1 + \ln(x+3) - \ln x]$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\underbrace{x-1}_{\to+\infty} + \underbrace{\ln \overbrace{\frac{x+3}{x}}^{\to 1}}_{\to 0}\right)$$
$$= +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left(1 - \underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{\ln\frac{x+3}{x}}{x}}_{\to 0}\right)$$
$$= 1$$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x) - x]$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left(-1 + \underbrace{\ln\overbrace{\frac{x+3}{x}}^{\to 1}}_{\to 0}\right)$$
$$= -1$$

$\boxed{\mathcal{C}_f \text{ admet une A.O. } d \equiv y = x - 1 \text{ en } +\infty.}$ **(2,5 pt)**

d)

f est dérivable sur son domaine.

$\forall x \in \text{dom} f' = \text{dom} f$:

$$f'(x)$$
$$= [x - 1 + \ln(x+3) - \ln|x|]'$$
$$= 1 + \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x}$$
$$= \frac{x(x+3) + x - (x+3)}{x(x+3)}$$
$$= \frac{x^2 + 3x + x - x - 3}{x(x+3)}$$ **(1 pt)**
$$= \boxed{\frac{x^2 + 3x - 3}{x(x+3)}}$$

Calul à part :

$x^2 + 3x - 3 = 0$; $\Delta = 9 + 12 = 21 > 0$

$x_1 = \dfrac{-3 - \sqrt{21}}{2} \approx -3{,}79 \leq -3$: à écarter

(0,5 pt)

$x_2 = \dfrac{-3+\sqrt{21}}{2} \approx 0{,}79$

Tableau de variation de f : **(1,5 pt)**

x	-3		0		$\frac{-3+\sqrt{21}}{2}$		$+\infty$
x^2+3x-3		$-$		$-$	0	$+$	
$x(x+3)$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ $\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	$1{,}36$ min	$\nearrow$	$+\infty$

$f\left(\dfrac{-3+\sqrt{21}}{2}\right) \approx 1{,}36$

e)

$\forall x \in \mathrm{dom} f'' = \mathrm{dom} f$:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(1+\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x}\right)' \\ &= -\frac{1}{(x+3)^2}+\frac{1}{x^2} \\ &= \frac{-x^2+(x+3)^2}{x^2(x+3)^2} \\ &= \frac{-x^2+x^2+6x+9}{x^2(x+3)^2} \\ &= \boxed{\frac{3(2x+3)}{x^2(x+3)^2}} \end{aligned}$$

(1 pt)

Tableau de concavité de f : **(1 pt)**

x	-3		$-\frac{3}{2}$		0		$+\infty$
$f''(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	$\|\|$	$+$	
Concavité de f	$\|\|$	bas	PI	haut	$\|\|$	haut	

$f\left(-\dfrac{3}{2}\right) = -\dfrac{3}{2} - 1 + \ln\dfrac{3}{2} - \ln\dfrac{3}{2} = -\dfrac{5}{2}$

$\boxed{I\left(-\frac{3}{2};-\frac{5}{2}\right)}$ est un point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$.

(0,5 pt)

f)

$\forall x \in \mathrm{dom} f$:

$\varphi(x) = f(x) - (x-1) = \ln(x+3) - \ln|x|$

On a :

$$\begin{aligned} & \varphi(x) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \ln(x+3) = \ln|x| \quad |\cdot 2 \\ \Leftrightarrow\ & \ln[(x+3)^2] = \ln x^2 \\ \Leftrightarrow\ & (x+3)^2 = x^2 \quad \text{(car ln est une bijection str. } \nearrow\text{)} \\ \Leftrightarrow\ & x^2+6x+9 = x^2 \\ \Leftrightarrow\ & 6x = -9 \\ \Leftrightarrow\ & x = -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

De même : **(1 pt)**

$\varphi(x) > 0 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow x > -\dfrac{3}{2}$

Tableau de concavité : **(1 pt)**

x	-3		$-\frac{3}{2}$		0		$+\infty$
$\varphi(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	$\|\|$	$+$	
Position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à d	$\|\|$	$d/\mathcal{C}_f$	Point d'int.	$\mathcal{C}_f/d$	$\|\|$	$\mathcal{C}_f/d$	

$\mathcal{C}_f$ coupe d au point $\boxed{I\left(-\frac{3}{2};-\frac{5}{2}\right)}$. **(0,5 pt)**

g)

Équation de la tangente au point d'inflexion I :

$$\begin{aligned} y &= -\frac{5}{2} + f'\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\left[x-\left(-\frac{3}{2}\right)\right] \\ \Leftrightarrow y &= -\frac{5}{2}+\frac{7}{3}\left(x+\frac{3}{2}\right) \\ \Leftrightarrow y &= -\frac{5}{2}+\frac{7}{3}x+\frac{7}{2} \\ \Leftrightarrow & \boxed{y = \frac{7}{3}x+1} \end{aligned}$$

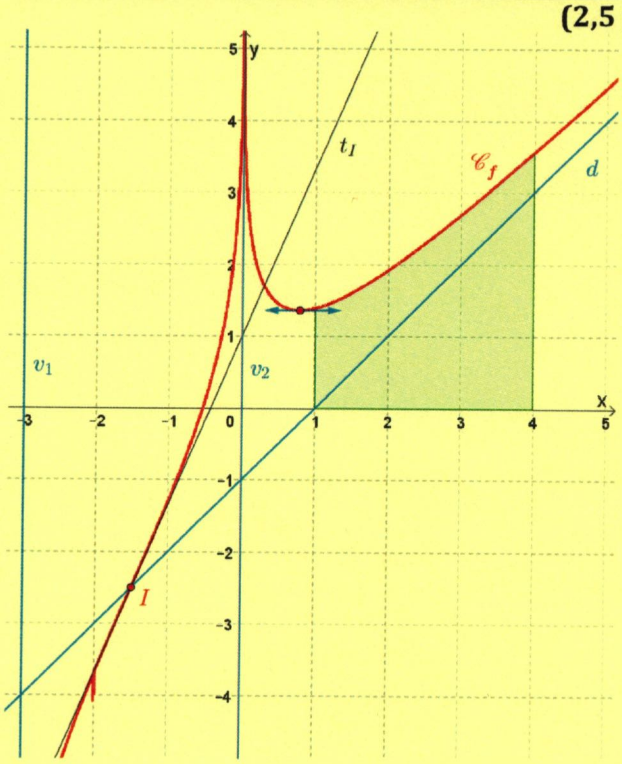
Calcul à part : **(1 pt)**

$f'\left(-\dfrac{3}{2}\right) = 1 + \dfrac{1}{\frac{3}{2}} - \dfrac{1}{-\frac{3}{2}} = 1 + \dfrac{2}{3} + \dfrac{2}{3} = \dfrac{7}{3}$

h)

x	$-2{,}5$	-2	-1	$-0{,}5$	$-0{,}25$	$0{,}25$	2	3	5
$f(x)$	$-5{,}11$	$-3{,}69$	$-1{,}31$	$0{,}11$	$1{,}15$	$1{,}81$	$1{,}92$	$2{,}69$	$4{,}47$

(2,5 pt)



i)

$$\mathcal{A} = \int_1^4 f(x)dx$$
$$= \int_1^4 [x - 1 + \ln(x+3) - \ln|x|]\, dx$$
$$= \int_1^4 (x-1)\, dx + \int_1^4 \ln(x+3)\, dx - \int_1^4 \ln x\, dx$$
$$= \frac{9}{2} + 7\ln 7 - 4\ln 4 - 3 - 4\ln 4 + 3$$
$$= \boxed{\frac{9}{2} + 7\ln 7 - 8\ln 4} \qquad \textbf{(0,5 pt)}$$
$$\approx 7{,}03 \text{ cm}^2$$

<u>Calculs à part :</u>

$$\int_1^4 (x-1)\, dx = \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_1^4 = 4 - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{2} \quad \textbf{(0,5 pt)}$$

$$\int_1^4 \ln(x+3)\, dx \qquad \boxed{\begin{array}{ll} u(x) = \ln(x+3) & v'(x) = 1 \\ u'(x) = \dfrac{1}{x+3} & v(x) = x+3 \end{array}}$$
$$= [(x+3)\ln(x+3)]_1^4 - \int_1^4 1\, dx \quad \text{(int. par part.)}$$
$$= 7\ln 7 - 4\ln 4 - [x]_1^4 \qquad \textbf{(1,5 pt)}$$
$$= 7\ln 7 - 4\ln 4 - 3$$
$$\int_1^4 \ln x\, dx = [x\ln x - x]_1^4$$
$$= 4\ln 4 - 4 + 1$$
$$= 4\ln 4 - 3$$

(5+3,5+2,5+2,5+1+2,5+3) 20 points

<u>Question 3</u>

Aire de la surface S : **(2 pt)**

$$\mathcal{A} = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|\, dx$$
$$= -\int_{-\pi}^{0} f(x)\, dx + \int_0^{\pi} f(x)\, dx$$
$$= -[F(x)]_{-\pi}^0 + [F(x)]_0^{\pi}$$
$$= -F(0) + F(-\pi) + F(\pi) - F(0)$$
$$= F(-\pi) + F(\pi) - 2F(0)$$
$$= \frac{4}{5}e^{\frac{\pi}{2}} + \frac{4}{5}e^{-\frac{\pi}{2}} - 2\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)$$
$$= \boxed{\frac{4}{5}\left(e^{\frac{\pi}{2}} + e^{-\frac{\pi}{2}} + 2\right)}$$
$$\approx 5{,}61 \text{ unités d'aire}$$

<u>Calcul à part :</u> **(5 pt)**

$$F(x) = \int f(x)\, dx \qquad \boxed{\begin{array}{ll} u(x) = \sin x & v'(x) = e^{-\frac{x}{2}} \\ u'(x) = \cos x & v(x) = -2e^{-\frac{x}{2}} \end{array}}$$
$$= \int e^{-\frac{x}{2}} \sin x\, dx$$
$$= -2e^{-\frac{x}{2}}\sin x + 2\int e^{-\frac{x}{2}}\cos x\, dx$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} u(x) = \cos x & v'(x) = e^{-\frac{x}{2}} \\ u'(x) = -\sin x & v(x) = -2e^{-\frac{x}{2}} \end{array}}$$

$$= -2e^{-\frac{x}{2}}\sin x - 4e^{-\frac{x}{2}}\cos x - 4\underbrace{\int e^{-\frac{x}{2}}\sin x\, dx}_{=F(x)}$$

On a donc :

$$F(x) = -2e^{-\frac{x}{2}}\sin x - 4e^{-\frac{x}{2}}\cos x - 4F(x)$$
$$\Leftrightarrow 5F(x) = -2e^{-\frac{x}{2}}\sin x - 4e^{-\frac{x}{2}}\cos x$$
$$\Leftrightarrow \boxed{F(x) = -\frac{2}{5}e^{-\frac{x}{2}}\sin x - \frac{4}{5}e^{-\frac{x}{2}}\cos x}$$

7 points

<u>Question 4</u>

a)

$$\log_x \frac{1}{625} \leq -\log_{\frac{1}{2}} 8 - 2\log_5 \sqrt{x}$$

CE : α) $x > 0$ et $x \neq 1$

β) $\sqrt{x} > 0 \Leftrightarrow x > 0$

Domaine d'existence : $\boxed{D = \mathbb{R}_0^+ \backslash \{1\}}$ **(0,5 pt)**

$\forall x \in D$:

$$\log_x \frac{1}{625} \leq -\log_{\frac{1}{2}} 8 - 2\log_5 \sqrt{x}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\log_5 \frac{1}{625}}{\log_5 x} \leq -\log_{\frac{1}{2}}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}\right] - \log_5\left[\left(\sqrt{x}\right)^2\right]$$
$$\Leftrightarrow \frac{\log_5(5^{-4})}{\log_5 x} \leq -(-3) - \log_5 x$$
$$\Leftrightarrow \frac{-4}{\log_5 x} - 3 + \log_5 x \leq 0 \qquad \textbf{(1,5 pt)}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\log_5^2 x - 3\log_5 x - 4}{\log_5 x} \leq 0$$

<u>Calcul à part :</u>

$$\log_5^2 x - 3\log_5 x - 4 \leq 0$$
$$\Leftrightarrow y^2 - 3y - 4 \leq 0 \quad \text{(en posant: } y = \log_5 x\text{)}$$
$$\Leftrightarrow (y+1)(y-4) \leq 0$$

$\Leftrightarrow \quad -1 \quad \leq \quad y \quad \leq \quad 4$

$\Leftrightarrow \log_5 5^{-1} \leq \log_5 x \leq \log_5 5^4$ **(1,5 pt)**

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{5} \leq x \leq 625$ (car $\log_5$ est une bij. str. ↗)

Tableau des signes : **(1 pt)**

x	0		$\frac{1}{5}$		1		625		$+\infty$
$\log_5^2 x - 3\log_5 x - 4$	$\Vert$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$\log_5 x$	$\Vert$	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{\log_5^2 x - 3\log_5 x - 4}{\log_5 x}$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

Ensemble des solutions de l'inéquation :

$\boxed{S = \left]0\,;\frac{1}{5}\right] \cup \left]1\,;625\right]}$ **(0,5 pt)**

b)

$\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$

On a : **(0,5 pt)**

$\lim\limits_{x\to 0} \underbrace{\dfrac{\sin x}{x}}_{\text{F.I.:}\frac{0}{0}} \overset{\text{H}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x}{1} = 1$

Donc:

$\lim\limits_{x\to 0} \underbrace{\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)}_{\to 1}^{\overbrace{\frac{1}{x}}^{\to\infty}}$ (F.I.: 1^∞)

$= \lim\limits_{x\to 0} e^{\overbrace{\frac{1}{x}\ln\frac{\sin x}{x}}^{\to 0}}$ **(1 pt)**

$= \boxed{1}$

Calcul à part:

$\lim\limits_{x\to 0} \underbrace{\dfrac{1}{x}}_{\to\infty} \underbrace{\ln\dfrac{\sin x}{x}}_{\to 0}$ (F.I.: $\infty \cdot 0$)

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\frac{\sin x}{x}}{x}$ $\left(\text{F.I.: } \dfrac{0}{0}\right)$

$\overset{\text{H}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\dfrac{\cos x \cdot x - \sin x \cdot 1}{x^2}}{\dfrac{\sin x}{x}}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\cos x - \sin x}{x \sin x}$ $\left(\text{F.I.: } \dfrac{0}{0}\right)$ **(2,5 pt)**

$\overset{\text{H}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x + x(-\sin x) - \cos x}{\sin x + x\cos x}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-x\sin x}{\sin x + x\cos x}$ $\left(\text{F.I.: } \dfrac{0}{0}\right)$

$\overset{\text{H}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\overbrace{-\sin x - x\cos x}^{\to 0}}{\underbrace{\cos x + \cos x + x(-\sin x)}_{\to 2}}$

$= 0$

(5+4) 9 points

Question 5

a)

$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{2\}$:

$$\frac{3x^3 - 9x^2 + 7x + 2}{(x-2)^2(x^2-x+2)} = \frac{1}{x-2} + \frac{a}{(x-2)^2} + \frac{bx+c}{x^2-x+2}$$

$\Leftrightarrow 3x^3 - 9x^2 + 7x + 2$
$= (x-2)(x^2-x+2)$
$+ a(x^2-x+2)$
$+ (bx+c)(x-2)^2$

$\Leftrightarrow 3x^3 - 9x^2 + 7x + 2$
$= x^3 - x^2 + 2x - 2x^2 + 2x - 4$
$+ a(x^2-x+2)$
$+ (bx+c)(x-2)^2$

$\Leftrightarrow 2x^3 - 6x^2 + 3x + 6$
$= a(x^2-x+2)$
$+ (bx+c)(x-2)^2 \quad (*)$

L'égalité (*) est également vrai pour $x = 2$.

- $x = 2$ dans (*) : **(3 pts)**
  $4 = 4a \Leftrightarrow \boxed{a = 1}$
- $x = 0$ et $a = 1$ dans (*) :
  $6 = 2 + 4c \Leftrightarrow 4c = 4 \Leftrightarrow \boxed{c = 1}$
- $x = 1$, $a = 1$ et $c = 1$ dans (*) :
  $5 = 2 + b + 1 \Leftrightarrow \boxed{b = 2}$

Méthode alternative (système) :

$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{2\}$:

$$\frac{3x^3 - 9x^2 + 7x + 2}{(x-2)^2(x^2-x+2)} = \frac{1}{x-2} + \frac{a}{(x-2)^2} + \frac{bx+c}{x^2-x+2}$$

$\Leftrightarrow 3x^3 - 9x^2 + 7x + 2$
$= (x-2)(x^2-x+2)$
$+ a(x^2-x+2)$
$+ (bx+c)(x-2)^2$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow 3x^3-9x^2+7x+2 &= x^3-x^2+2x-2x^2+2x-4\\
&\quad +a(x^2-x+2)\\
&\quad +(bx+c)(x^2-4x+4)\\
\Leftrightarrow 2x^3-6x^2+3x+6 &= ax^2-ax+2a+bx^3-4bx^2\\
&\quad +4bx+cx^2-4cx+4c\\
\Leftrightarrow 2x^3-6x^2+3x+6 &= bx^3+(a-4b+c)x^2\\
&\quad +(-a+4b-4c)x+(2a+4c)
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{b=2} & (1)\\ a-4b+c=-6 & (2)\\ -a+4b-4c=3 & (3)\\ 2a+4c=6 & (4)\end{cases}$$

(2)+(3) :

$-3c=-3 \Leftrightarrow \boxed{c=1}$

$c=1$ dans (4) :

$2a+4=6 \Leftrightarrow \boxed{a=1}$

D'où :

$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{2\}$:

$$\frac{3x^3-9x^2+7x+2}{(x-2)^2(x^2-x+2)} = \frac{1}{x-2}+\frac{1}{(x-2)^2}+\frac{2x+1}{x^2-x+2}$$

b)

$$\begin{aligned}
&\int \frac{3x^3-9x^2+7x+2}{(x-2)^2(x^2-x+2)}\,dx\\
&= \int \frac{1}{x-2}\,dx + \int \frac{1}{(x-2)^2}dx + \int \frac{2x+1}{x^2-x+2}\,dx\\
&= \ln|x-2| + \int (x-2)^{-2}dx + \int \frac{2x-1+2}{x^2-x+2}\,dx\\
&= \ln|x-2| + \frac{(x-2)^{-1}}{-1} + \int \underbrace{\frac{2x-1}{x^2-x+2}}_{\frac{u'}{u}}\,dx\\
&\quad + \int \frac{2}{x^2-x+2}\,dx\\
&= \ln|x-2| - \frac{1}{x-2} + \ln\Big|\underbrace{x^2-x+2}_{>0}\Big|\\
&\quad + \int \frac{2}{x^2-x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+2}\,dx\\
&= \ln|x-2| - \frac{1}{x-2} + \ln(x^2-x+2)\\
&\quad + \int \frac{2}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}}\,dx\\
&= \ln|x-2| - \frac{1}{x-2} + \ln(x^2-x+2)\\
&\quad + \int \frac{2}{\frac{7}{4}\left[1+\frac{4}{7}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\right]}\,dx\\
&= \ln|x-2| - \frac{1}{x-2} + \ln(x^2-x+2)\\
&\quad + \frac{4}{7}\cdot\sqrt{7}\int \underbrace{\frac{\frac{2}{\sqrt{7}}}{1+\left(\frac{2x-1}{\sqrt{7}}\right)^2}}_{\frac{u'}{1+u^2}}\,dx
\end{aligned}$$

(7 pt)

$$= \boxed{\ln|x-2| - \frac{1}{x-2} + \ln(x^2-x+2)}$$
$$\boxed{+\frac{4\sqrt{7}}{7}\,\text{Arctan}\,\frac{2x-1}{\sqrt{7}} + k \quad (k\in\mathbb{R})}$$

(3+7) 10 points