LE GOUVERNEMENT DU GRAND-DUCHÉ DE LUXEMBOURG Ministère de l'Éducation nationale, de l'Enfance et de la Jeunesse	EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES CLASSIQUES 2019 CORRIGÉ – BARÈME	
BRANCHE	**SECTION(S)**	**ÉPREUVE ÉCRITE**
Mathématiques I	**C**	*Durée de l'épreuve :* 1h45 *Date de l'épreuve :* 04 juin 2019

MATHÉMATIQUES I - Correction

Question I (12 points)

$P(z) = iz^3 - (i-3)z^2 + (-6+11i)z - 3(9i-7)$

Soit $z = bi$ ($b \in \mathbb{R}$) la racine imaginaire pure de $P(z)$

$$\begin{aligned}
P(z) = 0 &\Leftrightarrow i(bi)^3 - (i-3)(bi)^2 + (-6+11i)bi - 3(9i-7) = 0 \\
&\Leftrightarrow b^3 - (i-3)(-b^2) + (-6+11i)bi - 3(9i-7) = 0 \\
&\Leftrightarrow b^3 + b^2 i - 3b^2 - 6bi - 11b - 27i + 21 = 0 \\
&\Leftrightarrow (b^3 - 3b^2 - 11b + 21) + (b^2 - 6b - 27)i = 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} b^3 - 3b^2 - 11b + 21 = 0 & (1) \\ b^2 - 6b - 27 = 0 & (2) \end{cases}
\end{aligned}$$

$(2) : \Delta = 144 > 0$, $b_1 = -3$, $b_2 = 9$

Vérifions dans (2) :

Si $b = -3$, alors $(-3)^3 - 3\cdot(-3)^2 - 11\cdot(-3) + 21 = -27 - 27 + 33 + 21 = 0$

Si $b = 9$, alors $9^3 - 3\cdot 9^2 - 11\cdot 9 + 21 = 729 - 243 - 99 + 21 = 408 \neq 0$

Donc $z = -3i$ est une racine de $P(z)$

	i	$3-i$	$-6+11i$	$21-27i$
$-3i$		3	$-3-18i$	$-21+27i$
	i	$6-i$	$-9-7i$	0

$P(z) = (z+3i)[iz^2 + (6-i)z + (-9-7i)]$

$P(z) = 0 \Leftrightarrow z = -3i$ ou $iz^2 + (6-i)z + (-9-7i) = 0$ $(*)$

$(*) : \Delta = (6-i)^2 - 4\cdot i\cdot(-9-7i) = 36 - 12i - 1 + 36i - 28 = 7 + 24i$

Racines carrées complexes de $\Delta = 7 + 24i$: (Posons $u = x + yi$)

$$u^2 = 7 + 24i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 7 & (I) \\ 2xy = 24 & (II) \end{cases}$$

$(I)^2 + (II)^2 : (x^2+y^2)^2 = 625 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 25$ (car $x^2 + y^2 \geqslant 0$)

Considérons alors le système : $\begin{cases} x^2 - y^2 = 7 & (I) \\ x^2 + y^2 = 25 & (III) \end{cases}$

$(III) + (I) : 2x^2 = 32 \Leftrightarrow x^2 = 16 \Leftrightarrow x = -4$ ou $x = 4$

$(III) - (I) : 2y^2 = 18 \Leftrightarrow y^2 = 9 \Leftrightarrow y = -3$ ou $y = 3$

Or, d'après (II), x et y ont le même signe

Les racines carrées complexes de Δ sont : $u_1 = 4 = +3i$ et $u_2 = -4 - 3i$

$$z_1 = \frac{-6 + i - 4 - 3i}{2i} = \frac{-10 - 2i}{2i} \cdot \frac{i}{i} = -1 + 5i$$

$$z_2 = \frac{-6 + i + 4 + 3i}{2i} = \frac{-2 + 4i}{2i} \cdot \frac{i}{i} = 2 + i$$

$S_{\mathbb{C}} = \{-3i; -1 + 5i; 2 + i\}$

Question II (5 + 2 + 3 = 10 points)

1) $z_1 = 4(1 - \sqrt{3}i) - \dfrac{12(\sqrt{3} - i)}{\sqrt{3} + i} \cdot \dfrac{\sqrt{3} - i}{\sqrt{3} - i}$

$= 4 - 4\sqrt{3}i - \dfrac{12(3 - 2\sqrt{3}i - 1)}{4}$

$= 4 - 4\sqrt{3}i - 3(2 - 2\sqrt{3}i)$

$= 4 - 4\sqrt{3}i - 6 + 6\sqrt{3}i$

$= -2 + 2\sqrt{3}i$

Forme trigonométrique de z_1 :

$r_1 = |z_1| = \sqrt{4 + 12} = 4$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\varphi_1 = -\dfrac{1}{2} \\ \sin\varphi_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \varphi_1 = \frac{2\pi}{3} \pmod{2\pi}$$

Donc : $z_1 = 4 \cdot cis\dfrac{2\pi}{3}$

Forme trigonométrique de z_2 :

$z_2 = -2\sqrt{2} \cdot cis\dfrac{3\pi}{4}$

$z_2 = 2\sqrt{2} \cdot cis\pi \cdot cis\dfrac{3\pi}{4}$

Donc : $z_2 = 2\sqrt{2} \cdot cis\dfrac{7\pi}{4} = 2\sqrt{2} \cdot cis\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$

2) $$Z = \frac{z_1^3}{z_2^2} = \frac{\left(4 \cdot cis\frac{2\pi}{3}\right)^3}{\left[2\sqrt{2} \cdot cis\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]^2} = \frac{64 \cdot cis2\pi}{8 \cdot cis\left(-\frac{\pi}{2}\right)} = 8 \cdot cis\frac{\pi}{2} = 8i$$

3) $z_3 = -32i = 32 \cdot cis\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

Les racines cinquièmes complexes sont :

$$r_k = \sqrt[5]{32} \cdot cis\left(\frac{-\frac{\pi}{2}}{5} + k \cdot \frac{2\pi}{5}\right) \qquad k \in \{0;1;2;3;4\}$$

$$r_k = 2 \cdot cis\left(-\frac{\pi}{10} + k \cdot \frac{2\pi}{5}\right) \qquad k \in \{0;1;2;3;4\}$$

Donc : $r_0 = 2 \cdot cis\left(-\frac{\pi}{10}\right)$, $r_1 = 2 \cdot cis\frac{3\pi}{10}$, $r_2 = 2 \cdot cis\frac{7\pi}{10}$, $r_3 = 2 \cdot cis\frac{11\pi}{10}$, $r_4 = 2 \cdot cis\frac{3\pi}{2}$

Question III (3 + 4 + 2 = 9 points)

1) $M(x;y;z) \in d \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{u}$ sont colinéaires

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} \text{ tel que } \overrightarrow{AM} = k \cdot \overrightarrow{u}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = -5k \\ y + 1 = k \\ z + 3 = -2k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - 5k \\ y = -1 + k \\ z = -3 - 2k \end{cases} \quad \text{(équations paramétriques de } d\text{)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x-2}{-5} = k \\ y + 1 = k \\ \frac{z+3}{-2} = k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = -5y - 5 \\ -2x + 4 = -5z - 15 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 5y + 3 = 0 \\ 2x - 5z - 19 = 0 \end{cases}$$

$$d \equiv \begin{cases} x + 5y + 3 = 0 \\ 2x - 5z - 19 = 0 \end{cases}$$

2) $M(x;y;z) \in \pi_1 \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{u}$ sont coplanaires

$$\Leftrightarrow \text{dét}(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AB};\vec{u}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-2 & -5 & -5 \\ y+1 & 3 & 1 \\ z+3 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\cdot\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} - (y+1)\cdot\begin{vmatrix} -5 & -5 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} + (z+3)\cdot\begin{vmatrix} -5 & -5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\cdot(-5) - (y+1)\cdot 5 + (z+3)\cdot 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow -5x + 10 - 5y - 5 + 10z + 30 = 0$$

$$\Leftrightarrow -5x - 5y + 10z + 35 = 0 \qquad |:(-5)$$

$$\Leftrightarrow x + y - 2z - 7 = 0 \qquad\qquad \pi_1 \equiv x + y - 2z - 7 = 0$$

3) Comme $\pi_2 \perp d$, $\vec{u}$ est un vecteur normal de π_2.

Donc : $\pi_2 \equiv -5x + y - 2z + d = 0$

$C(1;-5;-3) \in \pi_2 \Leftrightarrow -5 - 5 + 6 + d = 0 \Leftrightarrow d = 4$

Donc : $\pi_2 \equiv -5x + y - 2z + 4 = 0$

Question IV (12 points)

$$\begin{cases} mx + 2y + mz = -4 \\ x - 3y - 2z = 2 \\ 2x + y + 2z = -2 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} m & 2 & m \\ 1 & -3 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = m(-6+2) - (4-m) + 2(-4+3m)$$

$$= -4m - 4 + m - 8 + 6m$$

$$= 3m - 12 = 3(m-4)$$

$\Delta = 0 \Leftrightarrow m = 4$

Premier cas : $m \in \mathbb{R} \setminus \{4\}$

Dans ce cas $\Delta \neq 0$ et le système admet exactement une solution.

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -4 & 2 & m \\ 2 & -3 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -4(-6+2) - 2(4-m) - 2(-4+3m)$$

$$= 16 - 8 + 2m + 8 - 6m = -4m + 16 = -4(m-4)$$

$$\Rightarrow x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-4(m-4)}{3(m-4)} = -\frac{4}{3}$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} m & -4 & m \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{vmatrix} = m(4-4) - 1(-8+2m) + 2(8-2m)$$
$$= 8 - 2m + 16 - 4m = -6m + 24 = -6(m-4)$$
$$\Rightarrow y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-6(m-4)}{3(m-4)} = -2$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} m & 2 & -4 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = m(6-2) - 1(-4+4) + 2(4-12)$$
$$= 4m - 16 = 4(m-4)$$
$$\Rightarrow z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{4(m-4)}{3(m-4)} = \frac{4}{3}$$

$$S = \left\{ \left(-\frac{4}{3}; -2; \frac{4}{3} \right) \right\}$$

Interprétation géométrique :

Les 3 plans qui correspondent aux 3 équations se coupent en $I\left(-\frac{4}{3}; -2; \frac{4}{3}\right)$.

Deuxième cas : $m = 4$

Dans ce cas $\Delta = 0$ et le système devient :

$$\begin{cases} 4x + 2y + 4z = -4 \quad | : 2 \\ x - 3y - 2z = 2 \\ 2x + y + 2z = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y + 2z = -2 \quad (E_1) \\ x - 3y - 2z = 2 \quad (E_2) \to (E_1) + (E_2) \\ 2x + y + 2z = -2 \quad (E_3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y + 2z = -2 \\ 3x - 2y = 0 \\ x = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2k + \frac{3}{2}k + 2z = -2 \\ y = \frac{3}{2}k \\ x = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -1 - \frac{7}{4}k \\ y = \frac{3}{2}k \\ x = k \end{cases}$$

$$S = \left\{ \left(k; \frac{3}{2}k; -1 - \frac{7}{4}k \right) / k \in \mathbb{R} \right\}$$

Interprétation géométrique :

Les 3 plans qui correspondent aux 3 équations se coupent suivant la droite d passant par $A(0; 0; -1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \\ -\frac{7}{4} \end{pmatrix}$.

Question V (4 + (1 + 2 + 2) + (3 + 2 + 3) = 17 points)

1) $\left(\frac{2}{x^3} - \frac{x^5}{6}\right)^9 = \sum_{i=0}^{9}(-1)^i C_9^i \left(\frac{2}{x^3}\right)^{9-i}\left(\frac{x^5}{6}\right)^i$

Pour le terme en x^{13} on a : $(x^{-3})^{9-i} \cdot (x^5)^i = x^{13} \Rightarrow -27 + 3i + 5i = 13 \Rightarrow i = 5$

Il s'agit donc de $(-1)^5 C_9^5 \left(\frac{2}{x^3}\right)^4 \left(\frac{x^5}{6}\right)^5 = -126 \cdot 2^4 \cdot \frac{1}{6^5} x^{13} = -\frac{7}{27} x^{13}$

2) a) Nombre de comités : $A_{25}^3 = 13800$

b) Nombre de comités où le secrétaire est une fille : $14 \cdot A_{24}^2 = 7728$

c) Nombre de comités où le président et le secrétaire sont de sexes différents :

$14 \cdot 11 \cdot 2 \cdot 23 = 7084$

3) a) A : ≪ Tirer 3 vaccins sont contre la même maladie ≫

$P(A) = \frac{C_6^3 + C_8^3 + C_{12}^3}{C_{26}^3} = \frac{296}{2600} = \frac{37}{325} \approx 0,11$

b) B : ≪ Tirer un vaccin contre chaque maladie ≫

$P(B) = \frac{C_6^1 \cdot C_8^1 \cdot C_{12}^1}{C_{26}^3} = \frac{576}{2600} = \frac{72}{325} \approx 0,22$

c) $\overline{C}$: ≪ Tirer aucun vaccin contre la maladie Y ≫

$P(\overline{C}) = \frac{C_{18}^3}{C_{26}^3} = \frac{102}{325}$

C : ≪ Tirer au moins un vaccin contre la maladie Y ≫

$P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - \frac{102}{325} = \frac{223}{325} \approx 0,69$