LE GOUVERNEMENT
DU GRAND-DUCHÉ DE LUXEMBOURG
Ministère de l'Éducation nationale,
de l'Enfance et de la Jeunesse

EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES CLASSIQUES
2019
CORRIGÉ – BARÈME

BRANCHE	SECTION(S)	ÉPREUVE ÉCRITE
Mathématiques I	**B**	*Durée de l'épreuve :* 3 heures *Date de l'épreuve :* 16/09/2019

Question I :

1) $P(z) = z^3 + (m+6i)z^2 + (2m+5+6i)z - 3m$ avec $m \in \mathbb{C}$

a) $P(3i) = 0$

$\Leftrightarrow -27i - 9\cdot(m+6i) + 3i(2m+5+6i) - 3m = 0$

$\Leftrightarrow -27i - 9m - 54i + 6im + 15i - 18 - 3m = 0$

1,5

$\Leftrightarrow (-12+6i)m = 18+66i$

$\Leftrightarrow m = \dfrac{18+66i}{-12+6i}$

$\Leftrightarrow m = \dfrac{3+11i}{-2+i} \cdot \dfrac{-2-i}{-2-i}$

$\Leftrightarrow m = \dfrac{5-25i}{5}$

$\Leftrightarrow m = 1-5i$

b) $P(z) = z^3 + (1+i)z^2 + (7-4i)z - 3 + 15i$

D'après a), $P(z)$ est divisible par $(z-3i)$.

Schéma de Horner :

1,5

	1	$1+i$	$7-4i$	$-3+15i$
$3i$		$3i$	$-12+3i$	$3-15i$
	1	$1+4i$	$-5-i$	0

D'où : $P(z) = (z-3i)\cdot\underbrace{\left[z^2 + (1+4i)z - 5 - i\right]}_{Q(z)}$

Résolvons : $Q(z) = 0$

$\Delta = (1+4i)^2 - 4\cdot(-5-i) = -15 + 8i + 20 + 4i = 5 + 12i$

Recherchons $\delta = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$ tel que :

$\delta^2 = 5 + 12i$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 5 & (L_1) \\ 2xy = 12 \Rightarrow \hat{m} \text{ signe} \\ x^2 + y^2 = 13 & (L_2) \end{cases}$

$(L_2) + (L_1) : 2x^2 = 18$

$\Leftrightarrow x = \pm 3$

$(L_2) - (L_1) : 2y^2 = 8$

$y = \pm 2$

Les r.c.c. de Δ sont : $3+2i$ et $-3-2i$

Solutions de $Q(z)=0$:

$$z_1 = \frac{-1-4i+3+2i}{2} = 1-i$$

$$z_2 = \frac{-1-4i-3-2i}{2} = -2-3i$$

Conclusion : $P(z)=0$

$$S_{\mathbb{C}} = \{ 3i \,;\, -2-3i \,;\, 1-i \}$$

2) $z_A = \sqrt{3}+i \qquad z_B = 6-2\sqrt{3}\,i$

$$\frac{z_B}{z_A} = \frac{6-2\sqrt{3}\,i}{\sqrt{3}+i} \cdot \frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}-i}$$

$$= \frac{6\sqrt{3}-6i-6i-2\sqrt{3}}{3+1}$$

$$= \sqrt{3}-3i \qquad\qquad |\sqrt{3}-3i| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$= 2\sqrt{3}\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$= 2\sqrt{3}\ \mathrm{cis}\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

Autrement dit : $z_B = 2\sqrt{3}\ \mathrm{cis}\left(-\frac{\pi}{3}\right)\cdot z_A$

D'où : $B = (h\circ r)(A)$ avec $r = \mathrm{rot}\left(O\,;\,-\frac{\pi}{3}\right)$
et $h = \mathrm{hom}(O\,;\,2\sqrt{3})$

3) $\forall z \neq i$:

$$w = \frac{x+iy-3i}{i(x-iy)-1} = \frac{x+(y-3)i}{(y-1)+ix} \cdot \frac{(y-1)-ix}{(y-1)-ix}$$

$$= \frac{[x(y-1)+x(y-3)]+i[(y-3)(y-1)-x^2]}{(y-1)^2+x^2}$$

$$= \frac{(2xy-4x)+i(y^2-x^2-4y+3)}{(y-1)^2+x^2}$$

a) $w \in i\mathbb{R} \iff 2xy-4x=0 \qquad (x;y)\neq(0;1)$

$\iff 2x\cdot(y-2)=0$

$\iff x=0$ ou $y=2$

$\mathbb{E}$ est la réunion de l'axe (Oy) privé du point $A(i)$ et de la droite d'équation $y=2$.

b) $\omega \in \mathbb{R}$

$\iff y^2 - x^2 - 4y + 3 = 0$ avec $(x;y) \neq (0;1)$

$\iff (y-2)^2 - x^2 = 1$

$\iff Y^2 - X^2 = 1$ avec $\begin{cases} X = x \\ Y = y-2 \end{cases}$

équation d'une hyperbole équilatère $\mathcal{H}$ de centre $\Omega(2i)$ et d'axe focal $y = 2$.

Sommets dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$:

$S_1(i)$ et $S_2(-i)$

Sommets dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$:

$S_1(3i)$ et $S_2(i)$

$\mathbb{F}$ est donc l'hyperbole $\mathcal{H}$ privée du sommet S_2.

Question II :

1) 9B, 6R, 5V : 20 boules au total

$\# \Omega = C_{20}^3 = 1140$ tirages possibles

a) $\# A = C_9^2\, C_{11}^1 + C_6^2\, C_{14}^1 + C_5^2\, C_{15}^1 = 396 + 210 + 150 = 756$

$P(A) = \frac{756}{1140} = \frac{63}{95} \simeq 66{,}3\ \%$

b) $\# \overline{B} = C_{14}^3 = 364$

$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - \frac{364}{1140} = \frac{194}{285} \simeq 68{,}1\%$

2) $C_{3n}^1 + C_{3n}^2 + C_{3n}^3 - 1015n = 0$ Condition : $n \in \mathbb{N}_0$

$\iff \frac{(3n)!}{(3n-1)!} + \frac{(3n)!}{2\cdot(3n-2)!} + \frac{(3n)!}{6\cdot(3n-3)!} - 1015n = 0$

$\iff 3n + \frac{1}{2}\cdot 3n\cdot(3n-1) + \frac{1}{6}\cdot 3n\cdot(3n-1)\cdot(3n-2) - 1015n = 0 \quad \| \cdot 6$

$\iff 18n + 9n(3n-1) + 3n(3n-1)(3n-2) - 6090n = 0$

$\iff 18n + 27n^2 - 9n + 3n\cdot(9n^2 - 9n + 2) - 6090n = 0$

$\iff 18n + \cancel{27n^2} - 9n + 27n^3 - \cancel{27n^2} + 6n - 6090n = 0$

$\iff 27n^3 - 6075n = 0$

$\iff 27n\cdot(n^2 - 225) = 0$

$\iff n = 0$ ou $n = 15$ ou $n = -15$

à exclure car $n \in \mathbb{N}_0$ accept. à exclure car $n \in \mathbb{N}_0$

$\iff n = 15$

3) On répète n fois, de façon indépendante, le tirage à une cible qui comporte deux issues contraires :

P (« le tireur atteint la cible ») $= \frac{1}{3} = p$ ← succès

P (« le tireur rate la cible ») $= \frac{2}{3} = q$ ← Echec

On a un schéma de Bernoulli à n épreuves.

X : nombre de succès

$\forall k$ tel que $0 \leq k \leq n$:

$$P(X=k) = C_n^k \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{n-k}$$

Déterminons le plus petit entier n tel que :

$P(X \geq 1) \geq 0,97$

$\Longleftrightarrow 1 - P(X=0) \geq 0,97$

$\Longleftrightarrow P(X=0) \leq 0,03$

$\Longleftrightarrow C_n^0 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^0 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n \leq 0,03$

$\Longleftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^n \leq 0,03$

$\Longleftrightarrow n \cdot \underbrace{\ln \frac{2}{3}}_{<0} \leq \ln 0,03 \qquad \| : \ln \frac{2}{3}$

$\Longleftrightarrow \qquad n \geq \dfrac{\ln 0,03}{\ln \frac{2}{3}}$

$\Longleftrightarrow \qquad n \geq 8,6$

Le tireur doit donc tirer au moins 9 fois.

4) a) $P(4 \times V) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16} \quad (X = 16)$

$P(3 \times V, 1 \times F) = C_4^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right) = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{4}{16} \quad (X = 10)$

$P(2 \times V, 2 \times F) = C_4^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{6}{16} \quad (X = 4)$

$P(1 \times V, 3 \times F) = C_4^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{4}{16} \quad (X = 0)$

$P(0 \times V, 4 \times F) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16} \quad (X = 0)$

X : note obtenue

Loi de probabilité de X :

x_i	0	4	10	16
$f(x_i)$	$\frac{5}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$

b) $E(X)$

$= \frac{5}{16} \cdot 0 + \frac{6}{16} \cdot 4 + \frac{4}{16} \cdot 10 + \frac{1}{16} \cdot 16$

$= 5$

Question III :

1) $\Gamma : y = 2 - \frac{5}{4}\sqrt{-x+7}$

$\iff y - 2 = -\frac{5}{4}\sqrt{-x+7}$ avec $x \leq 7$ et $y \leq 2$

$\iff (y-2)^2 = \frac{25}{16}(-x+7)$ avec $x \leq 7$ et $y \leq 2$

$\iff (y-2)^2 = -\frac{25}{16}\cdot(x-7)$ avec $x \leq 7$ et $y \leq 2$

Posons : $\begin{cases} X = x - 7 \\ Y = y - 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x = X + 7 \\ y = Y + 2 \end{cases}$

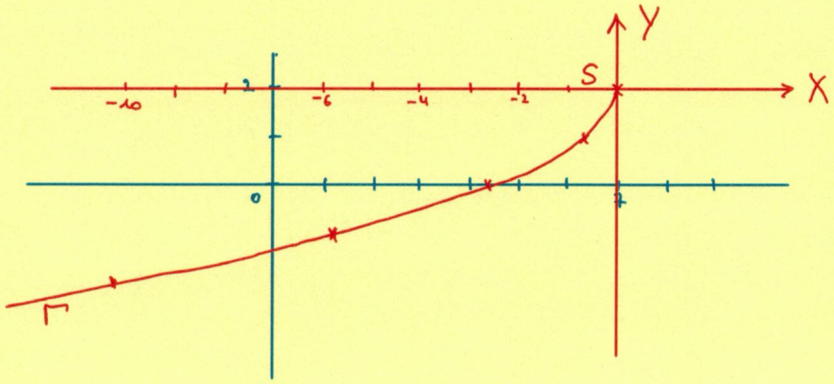
Soit $S(7;2)$. Dans $(S, \vec{i}, \vec{j})$, Γ a pour éq. :

$Y^2 = -\frac{25}{16}X$ avec $X \leq 0$ et $Y \leq 0$

$\iff X = -\frac{16}{25}Y^2$ avec $Y \leq 0$

Γ est une demi-parabole de sommet $S(7;2)$ et d'axe focal (SX)

X	0	−0,64	−2,56	−5,76	−10,24
Y	0	−1	−2	−3	−4



2) $\Gamma \equiv \frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1$

a) Γ est une ellipse d'axe focal (Oy)

$a = \sqrt{5}$, $b = 3$

$c^2 = b^2 - a^2 = 9 - 5 = 4 \implies c = 2$

Excentricité : $e = \frac{c}{b} = \frac{2}{3} < 1$

Caractéristiques de Γ dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$:

Centre : $O(0;0)$

Sommets : $S_1(0;3)$ $S_2(0;-3)$ $S_3(\sqrt{5};0)$ $S_4(-\sqrt{5};0)$

Foyers : $F(0;2)$ $F'(0;-2)$

Directrices : $d_F : y = \frac{9}{2}$ $\quad d_{F'} : y = -\frac{9}{2}$

b) Soit t une tangente à Γ perpendiculaire à d

$t \equiv y = -\frac{3}{2\sqrt{5}}x + k \quad (k \in \mathbb{R})$

$y = -\frac{3\sqrt{5}}{10}x + k$

$$\Gamma \cap t \equiv \begin{cases} 9x^2 + 5y^2 = 45 & (L_1) \\ y = -\frac{3\sqrt{5}}{10}x + k & (L_2) \end{cases}$$

(L_2) dans (L_1) :

$9x^2 + 5\cdot\left(k - \frac{3\sqrt{5}}{10}x\right)^2 = 45$

$\Longleftrightarrow 9x^2 + 5\cdot\left(k^2 - \frac{3\sqrt{5}}{5}kx + \frac{45}{100}x^2\right) = 45$

$\Longleftrightarrow 9x^2 + 5k^2 - 3\sqrt{5}kx + \frac{9}{4}x^2 = 45 \quad \| \cdot 4$

$\Longleftrightarrow 36x^2 + 20k^2 - 12\sqrt{5}kx + 9x^2 = 180$

$\Longleftrightarrow 45x^2 - 12\sqrt{5}kx + 20k^2 - 180 = 0 \quad (E)$

(E) admet une solution unique

$\Longleftrightarrow \Delta' = 0$

$\Longleftrightarrow 180k^2 - 45\cdot(20k^2 - 180) = 0$

$\Longleftrightarrow 180k^2 - 900k^2 + 8100 = 0$

$\Longleftrightarrow 720k^2 = 8100$

$\Longleftrightarrow k^2 = \frac{45}{4}$

$\Longleftrightarrow k = \frac{3\sqrt{5}}{2}$ ou $k = -\frac{3\sqrt{5}}{2}$

D'où les tangentes à Γ perpendiculaires à d :

$t_1 \equiv y = -\frac{3\sqrt{5}}{10}x + \frac{3\sqrt{5}}{2}$

$t_2 \equiv y = -\frac{3\sqrt{5}}{10}x - \frac{3\sqrt{5}}{2}$

3) Γ est l'hyperbole de foyers A et B avec $2b = 4 \Leftrightarrow b = 2$
d'après la définition bifocale.

$AB = 2c \Leftrightarrow 2c = 6 \Leftrightarrow c = 3$

$a^2 = c^2 - b^2 = 9 - 4 = 5 \Leftrightarrow a = \sqrt{5}$

Centre : $\Omega = \text{mil}\,[AB] \Leftrightarrow \Omega(1\,;\,2)$

Posons : $\begin{cases} X = x - 1 \\ Y = y - 2 \end{cases}$

<u>Dans $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$</u> : $\Gamma \equiv \dfrac{Y^2}{4} - \dfrac{X^2}{5} = 1$

Foyers : $A(0\,;\,3)$ $B(0\,;\,-3)$, axe focal (ΩY)

Sommets : $S_1(0\,;\,2)$, $S_2(0\,;\,-2)$

Excentricité : $e = \dfrac{c}{b} = \dfrac{3}{2} > 1$

Asymptotes : $Y = \dfrac{2\sqrt{5}}{5} X$; $Y = -\dfrac{2\sqrt{5}}{5} X$

<u>Dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$</u> : $\Gamma \equiv \dfrac{(y-2)^2}{4} - \dfrac{(x-1)^2}{5} = 1$

Foyers : $A(1\,;\,5)$ $B(1\,;\,-1)$, axe focal : $x = 1$

Sommets : $S_1(1\,;\,4)$; $S_2(1\,;\,0)$

Asymptotes :
- $y - 2 = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}(x-1) \Leftrightarrow y = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}x + 2 - \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$
- $y - 2 = -\dfrac{2\sqrt{5}}{5}(x-1) \Leftrightarrow y = -\dfrac{2\sqrt{5}}{5}x + 2 + \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

<u>Question IV</u>

$[AB]$ est un diamètre du cercle $\mathcal{C}$ de centre O.

Choisissons un R.O.N. $(O, \vec{i}, \vec{j})$ tel que :

$O = \text{mil}\,[AB]$

$A(-1\,;\,0)$ $B(1\,;\,0)$ $D(\cos\theta, \sin\theta)$ avec $\theta \in \,]0\,;\,2\pi[- \{\pi\}$

* Coordonnées de E :

$$E = s_D(B) \iff D = \text{mil}\,[EB]$$

$$\iff \begin{cases} 2\,x_D = x_E + x_B \\ 2\,y_D = y_E + y_B \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_E = 2\cos\theta - 1 \\ y_E = 2\sin\theta \end{cases} \quad \text{avec } \theta \in\,]0\,;2\pi[- \{\pi\}$$

* Eq. de la droite (AD) avec $A(-1\,;0)$ et $D(\cos\theta, \sin\theta)$:

$P(x\,;y) \in (AD) \iff \det(\overrightarrow{AD}\,;\overrightarrow{AP}) = 0$ avec $\theta \in\,]0\,;2\pi[-\{\pi\}$

$$\iff \begin{vmatrix} \cos\theta + 1 & x+1 \\ \sin\theta & y \end{vmatrix} = 0$$

$$\iff (\cos\theta + 1)\cdot y - (x+1)\sin\theta = 0$$

$$\iff -\sin\theta\, x + (1+\cos\theta)\, y - \sin\theta = 0$$

$$\iff \sin\theta\cdot x - (1+\cos\theta)\,y + \sin\theta = 0$$

* Eq. de la droite (OE) avec $O(0\,;0)$ et $E(2\cos\theta - 1\,; 2\sin\theta)$

$Q(x\,;y) \in (OE) \iff \det(\overrightarrow{OE}\,;\overrightarrow{OQ}) = 0$ avec $\theta \in\,]0\,;2\pi[-\{\pi\}$

$$\iff \begin{vmatrix} 2\cos\theta - 1 & x \\ 2\sin\theta & y \end{vmatrix} = 0$$

$$\iff 2\sin\theta\, x - (2\cos\theta - 1)\,y = 0$$

* Coordonnées de H tel que : $(AD) \cap (OE) = \{H\}$

$H(x_H, y_H) \in (AD) \cap (OE)$ avec $D \neq A$ et $D \neq B$ ($\iff \theta \in\,]0\,;2\pi[-\{\pi\}$)

$$\iff \begin{cases} \sin\theta\cdot x_H - (1+\cos\theta)\,y_H = -\sin\theta \\ 2\sin\theta\, x_H - (2\cos\theta - 1)\,y_H = 0 \end{cases} \quad \text{avec } \theta \in\,]0\,;2\pi[-\{\pi\}$$

$2(L_1) - (L_2)$: $\left[-2(1+\cos\theta) + (2\cos\theta - 1)\right]\cdot y_H = -2\sin\theta$

$$\iff -3\,y_H = -2\sin\theta$$

$$\iff y_H = \frac{2}{3}\sin\theta$$

Dans (L_2) : $2\sin\theta\cdot x_H - (2\cos\theta - 1)\cdot\frac{2}{3}\sin\theta = 0$

$$\iff 6\underbrace{\sin\theta}_{\neq 0 \text{ car } \theta \in]0;2\pi[-\{\pi\}}\cdot x_H = 2\sin\theta\cdot(2\cos\theta - 1)$$

$$\iff x_H = \frac{2\cos\theta - 1}{3}$$

Ainsi :

$H(x_H ; y_H) \in \mathbb{L}$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x_H = \dfrac{2\cos\theta - 1}{3} \\ y_H = \dfrac{2}{3}\sin\theta \end{cases} \quad \text{avec } \theta \in]0 ; 2\pi[- \{\pi\}$$

$(x_H ; y_H) \neq (\frac{1}{3} ; 0)$
$(x_H ; y_H) \neq (-1 ; 0)$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \cos\theta = \dfrac{3x_H + 1}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{3y_H}{2} \end{cases} \quad \text{avec } \theta \in]0 ; 2\pi[- \{\pi\}$$

$$\Longleftrightarrow \left(\frac{3x_H + 1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3y_H}{2}\right)^2 = 1$$

avec
$(x_H ; y_H) \neq (\frac{1}{3} ; 0)$
$(x_H ; y_H) \neq (-1 ; 0)$

$$\Longleftrightarrow 9\left(x_H + \frac{1}{3}\right)^2 + 9\,{y_H}^2 = 4$$

$$\Longleftrightarrow \left(x_H + \frac{1}{3}\right)^2 + {y_H}^2 = \frac{4}{9}$$

avec $H \neq A$
$H \neq (\frac{1}{3} ; 0)$

D'où :

$\mathbb{L}$ = cercle de centre $\Omega(-\frac{1}{3} ; 0)$ et de rayon $\frac{2}{3}$ privé des points $I(\frac{1}{3} ; 0)$ et $A(-1 ; 0)$.