| LE GOUVERNEMENT DU GRAND-DUCHÉ DE LUXEMBOURG Ministère de l'Éducation nationale, de l'Enfance et de la Jeunesse | EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES CLASSIQUES 2019 CORRIGÉ – BARÈME | |
|---|---|---|
| **BRANCHE** | **SECTION(S)** | **ÉPREUVE ÉCRITE** |
| **Mathématiques I** | **C** | *Durée de l'épreuve :* 1 heure 45 min<br>*Date de l'épreuve :* 16 septembre 2019 |

**Solution I** **((2+8)+(4+3+3)=20 points)**

**1) a)** $P(-5i) = 2\cdot(-5i)^3 + 5\cdot(-5i)^2 + 10i\cdot(-5i)^2 - 10\cdot(-5i) + 36i\cdot(-5i) - 55 - 50i$

$= 2\cdot 125i + 5\cdot(-25) + 10i\cdot(-25) + 50i + 180 - 55 - 50i$

$= (-125 + 180 - 55) + (250 - 250 + 50 - 50)i$

$= 0$

Comme $P(-5i) = 0$, $z_0 = -5i$ est une racine de $P$.

**b)** Comme $z_0 = -5i$ est une racine de $P$, $P(z)$ est divisible par $(z + 5i)$. Il existe donc un polynôme $Q$ tel que $P(z) = (z + 5i)\cdot Q(z)$. Recherche de $Q(z)$ à l'aide du schéma de Horner :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | $2$ | $5+10i$ | $-10+36i$ | $-55-50i$ |
| $-5i$ | | $-10i$ | $-25i$ | $55+50i$ |
| | $2$ | $5$ | $-10+11i$ | $0$ |

Donc $Q(z) = 2z^2 + 5z - 10 + 11i$ et $P(z) = (z + 5i)(2z^2 + 5z - 10 + 11i)$.

$P(z) = 0 \quad \Leftrightarrow (z + 5i)(2z^2 + 5z - 10 + 11i) = 0$

$\Leftrightarrow z = -5i$ ou $2z^2 + 5z - 10 + 11i = 0$

Résolution de l'équation $2z^2 + 5z - 10 + 11i = 0$ :

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= 25 - 4\cdot 2\cdot(-10 + 11i)$

$= 25 + 80 - 88i$

$= 105 - 88i$

Recherche des racines carrées complexes de $\Delta$ :

Soit $u = x + yi$, $(x;y) \in \mathbb{R}^2$ une racine carrée complexe de $\Delta$. Dans ce cas $u^2 = \Delta$ et $|u|^2 = |\Delta|$.

On obtient ainsi le système suivant :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 105 \\ 2xy = -88 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{105^2 + 88^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 105 & (1) \\ xy = -44 & (2) \\ x^2 + y^2 = 137 & (3) \end{cases}$$

$(1) + (3)$: $2x^2 = 242$ $\quad$ $(3) - (1)$: $2y^2 = 32$

$\Leftrightarrow x = 121$ $\quad$ $\Leftrightarrow y^2 = 16$

$\Leftrightarrow x = -11$ ou $x = 11$ $\quad$ $\Leftrightarrow y = -4$ ou $y = 4$

D'après $(2)$, $x$ et $y$ n'ont pas le même signe, donc les r.c.c. de $\Delta$ sont :

$$u_1 = -11 + 4i \text{ et } u_2 = 11 - 4i$$

Les solutions de l'équation sont : $z_1 = \frac{-5-11+4i}{2\cdot 2} = \frac{-16+4i}{4} = -4+i$ et $z_2 = \frac{-5+11-4i}{2\cdot 2} = \frac{6-4i}{4} = \frac{3}{2} - i$

Finalement : $\boxed{S = \left\{-5i; -4+i; \frac{3}{2} - i\right\}}$

**2)** $z_1 = \frac{(2-3i)^2}{i} + \frac{10+5i}{2-i}$

**a)** *Forme algébrique :*

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{(2-3i)^2}{i} + \frac{10+5i}{2-i} \\ &= \frac{4-12i-9}{i} + \frac{10+5i}{2-i} \cdot \frac{2+i}{2+i} \\ &= \frac{-5-12i}{i} \cdot \frac{i}{i} + \frac{20+10i+10i-5}{4+1} \\ &= \frac{-5i+12}{-1} + \frac{15+20i}{5} \\ &= 5i - 12 + 3 + 4i \\ &= \boxed{-9+9i} \end{aligned}$$

*Forme trigonométrique :*

Module : $|z_1| = \sqrt{81+81} = 9\sqrt{2}$

Argument : $\left.\begin{array}{l} \cos\varphi_1 = -\frac{9}{9\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\varphi_1 = \frac{9}{9\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \varphi_1 = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

Donc $\boxed{z_1 = 9\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{3\pi}{4}}$.

**b)** $z^3 = \overline{z_1} \iff z^3 = 9\sqrt{2}\operatorname{cis}\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$

Résoudre cette équation revient à chercher les racines cubiques de $\overline{z_1} = 9\sqrt{2}\operatorname{cis}\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$ :

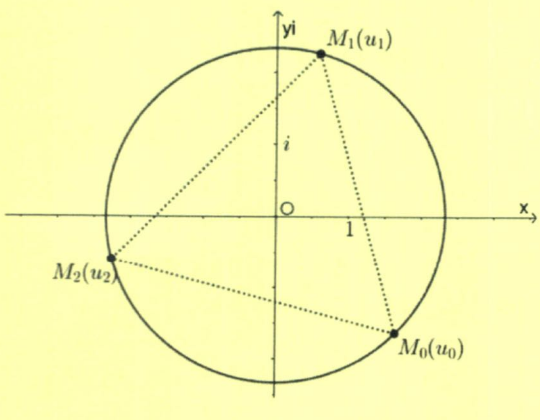
$u_k = \sqrt[3]{\sqrt{162}}\operatorname{cis}\frac{-\frac{3\pi}{4}+2k\pi}{3} = \sqrt[6]{162}\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3}\right) \quad (k \in \{0;1;2\})$

D'où, les solutions de l'équation sont :

$$u_0 = \sqrt[6]{162}\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$
$$u_1 = \sqrt[6]{162}\operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{12}\right)$$
$$u_2 = \sqrt[6]{162}\operatorname{cis}\left(\frac{13\pi}{12}\right)$$

$$\boxed{S = \left\{\sqrt[6]{162}\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right), \sqrt[6]{162}\operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{12}\right), \sqrt[6]{162}\operatorname{cis}\left(\frac{13\pi}{12}\right)\right\}}$$

**c)**




$\sqrt[6]{162} \approx 2{,}33$

$-\frac{\pi}{4}$ correspond à $-45°$

$\frac{5\pi}{12}$ correspond à $75°$

$\frac{13\pi}{12}$ correspond à $195°$

**Solution II** **(13+(1+2+4)=20 points)**

1) $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 3 & m-1 \\ 2 & -1 & m \\ m-3 & -5 & 1 \end{vmatrix}$ $= 3\cdot(-1+5m) - 2(3+5m-5) + (m-3)(3m+m-1)$

$= 3\cdot(-1+5m) - 2(-2+5m) + (m-3)(4m-1)$
$= -3+15m+4-10m+4m^2 - m - 12m + 3$
$= 4m^2 - 8m + 4$
$= 4(m-1)^2$

$\Delta = 0 \Leftrightarrow 4(m-1)^2 = 0$
$\Leftrightarrow m = 1$

Le système admet une solution unique pour $\boxed{m \in \mathbb{R}\setminus\{1\}}$.

<u>1<sup>er</sup> cas : $m = 1$</u>

Dans ce cas le système devient : $\begin{cases} 3x+3y = 3 \\ 2x - y + z = 0 \\ -2x-5y+z = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 1 \\ 2x - y + z = 0 \\ -2x-5y+z = -4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 1 \\ 4x+4y = 4 \\ -2x-5y+z = -4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 1 \\ x+y = 1 \\ -2x-5y+z = -4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 1 & (1) \\ -2x-5y+z = -4 & (2) \end{cases}$

D'après (1): $x = 1 - y\ (*)$ (ou $y = 1 - x$)
On remplace $(*)$ dans (2): $-2+2y-5y+z = -4 \Leftrightarrow z = 3y-2$ (ou $z = -3x+1$)
$\boxed{S = \{(1-k;k;-2+3k) \mid k \in \mathbb{R}\}}$ (ou $S = \{(k;1-k;-3k+1) \mid k \in \mathbb{R}\}$ ou $S = \left\{\left(\frac{1}{3}-\frac{k}{3};\frac{2}{3}+\frac{k}{3};k\right) \middle| k \in \mathbb{R}\right\}$)

<u>Interprétation géométrique :</u> Les équations du système sont celles de 3 plans qui se coupent selon la droite passant par le point $A(1;0;-2)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

<u>2<sup>e</sup> cas : $m \neq 1$</u>

$\Delta_x = \begin{vmatrix} 3 & 3 & m-1 \\ 0 & -1 & m \\ -4 & -5 & 1 \end{vmatrix}$ $= 3\cdot(-1+5m) - 0 - 4(3m+m-1)$

$= -3+15m-16m+4$
$= -m+1\ (= -(m-1))$

$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 3 & m-1 \\ 2 & 0 & m \\ m-3 & -4 & 1 \end{vmatrix}$ $= 3\cdot(0+4m) - 2(3+4m-4) + (m-3)(3m-0)$

$= 12m + 2 - 8m + 3m^2 - 9m$
$= 3m^2 - 5m + 2\ (= (m-1)(3m-2))$

$\Delta_z = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ m-3 & -5 & -4 \end{vmatrix}$ $= 3\cdot(4+0) - 2(-12+15) + (m-3)(0+3)$

$= 12 - 6 + 3m - 9$

$$= 3m - 3 \ (= 3(m-1))$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-m+1}{4(m-1)^2} = \frac{-(m-1)}{4(m-1)^2} = -\frac{1}{4(m-1)}$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{3m^2-5m+2}{4(m-1)^2} = \frac{(m-1)(3m-2)}{4(m-1)^2} = \frac{3m-2}{4(m-1)}$$

$$z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{3m-3}{4(m-1)^2} = \frac{3(m-1)}{4(m-1)^2} = \frac{3}{4(m-1)}$$

$$\boxed{S = \left\{\left(-\frac{1}{4(m-1)}; \frac{3m-2}{4(m-1)}; \frac{3}{4(m-1)}\right)\right\}}$$

Interprétation géométrique : Les équations du système sont celles de 3 plans qui se coupent au point $I_m\left(-\frac{1}{4(m-1)}; \frac{3m-2}{4(m-1)}; \frac{3}{4(m-1)}\right)$.

**2) a)** $5 \cdot 1 - (-2) + 2 \cdot 5 + 7 = 24 \ (\neq 0)$

Donc $\boxed{A \notin \pi}$.

**b)** Comme $\pi \perp d$, le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ normal au plan $\pi$ est un vecteur directeur de la droite $d$.

$$M(x;y;z) \in d \iff \exists k \in \mathbb{R} : \overrightarrow{AM} = k \cdot \vec{n}$$

$$\iff \begin{cases} x - 1 = 5k \\ y + 2 = -k \\ z - 5 = 2k \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 1 + 5k \\ y = -2 - k \\ z = 5 + 2k \end{cases}$$

Donc $\boxed{d \equiv \begin{cases} x = 1 + 5k \\ y = -2 - k \quad (k \in \mathbb{R}) \\ z = 5 + 2k \end{cases}}$.

**c)** $I(x;y;z) \in d \cap \pi \iff \begin{cases} x = 1 + 5k & (1) \\ y = -2 - k & (2) \\ z = 5 + 2k & (3) \\ 5x - y + 2z + 7 = 0 & (4) \end{cases}$

On remplace (1), (2) et (3) dans (4) : $5(1+5k) - (-2-k) + 2(5+2k) + 7 = 0$

$$\iff 5 + 25k + 2 + k + 10 + 4k + 7 = 0$$

$$\iff 30k + 24 = 0$$

$$\iff k = -\frac{4}{5}$$

On remplace $k = -\frac{4}{5}$ dans (1), (2) et (3) :

$$x = 1 + 5 \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = -3$$

$$y = -2 - \left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{6}{5}$$

$$z = 5 + 2 \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{17}{5}$$

$$\boxed{d \cap \pi = \left\{I\left(-3; -\frac{6}{5}; \frac{17}{5}\right)\right\}}$$

**Solution III** **(5+(2+3+3)+(1+3+3) =20 points)**

**1)** $\left(\frac{x^7}{3}-\frac{2}{x^2}\right)^6=\sum_{p=0}^{6}C_6^p\cdot(-1)^p\cdot\left(\frac{x^7}{3}\right)^{6-p}\cdot\left(\frac{2}{x^2}\right)^p$

Le terme général est : $C_6^p\cdot(-1)^p\cdot x^{42-7p}\cdot 3^{p-6}\cdot 2^p\cdot x^{-2p}=C_6^p\cdot(-1)^p\cdot 3^{p-6}\cdot 2^p\cdot x^{42-9p}$

On obtient le terme en $\frac{1}{x^3}$ lorsque $42-9p=-3\Leftrightarrow p=5$

Pour $p=5$ : $C_6^5\cdot(-1)^5\cdot 3^{5-6}\cdot 2^5\cdot x^{42-45}=-\frac{6!}{5!1!}\cdot 3^{-1}\cdot 2^5\cdot x^{-3}$

$=\boxed{-\frac{64}{x^3}}$

**2) a)** $A$: « tirer une main ayant au moins une carte de chaque couleur »

$$P(A)=\frac{4\cdot C_8^2\cdot C_8^1\cdot C_8^1\cdot C_8^1}{C_{32}^5}=\frac{4\cdot 28\cdot 8\cdot 8\cdot 8}{201\,376}=\frac{57\,344}{201\,376}=\boxed{\frac{256}{899}}\ (\approx 28{,}48\ \%)$$

**b)** $B$: « tirer une main ayant au moins 3 cartes de la même couleur »

$$P(B)=4\cdot\frac{C_8^3\cdot C_{24}^2+C_8^4\cdot C_{24}^1+C_8^5\cdot C_{24}^0}{C_{32}^5}=4\cdot\frac{15\,456+1\,680+56}{201\,376}=\boxed{\frac{307}{899}}\ (\approx 34{,}15\ \%)$$

**c)** $C$: « tirer une main contenant exactement une figure et trois cœurs »

$$P(C)=\frac{C_3^0\cdot C_9^1\cdot C_5^3\cdot C_{15}^1+C_3^1\cdot C_9^0\cdot C_5^2\cdot C_{15}^2}{C_{32}^5}=\frac{1\,350+3\,150}{201\,376}=\boxed{\frac{1\,125}{50\,344}}\ (\approx 2{,}23\ \%)$$

**3) a)** $A$: « codes possibles »

$card\ A=B_{12}^5=12^5=\boxed{248\,832}$

**b)** $B$: « codes composés d'une lettre et de quatre chiffres distincts »

$$card\ B=\underbrace{C_2^1}_{\text{Choix de la lettre}}\cdot\underbrace{C_{10}^4}_{\text{Choix des chiffres}}\cdot\underbrace{5!}_{\text{Nombre de permutations}}=2\cdot\frac{10!}{6!\cdot 4!}\cdot 5!=2\cdot 210\cdot 120=\boxed{50\,400}$$

**c)** $C$: « codes commençant par la lettre A, contenant 2 lettres et 3 chiffres distincts et qui se terminent par un chiffre pair »

$$card\ C=\underbrace{C_1^1}_{\text{Lettre A se trouvant au début du code}}\cdot\underbrace{C_9^2}_{\text{Choix des 2 chiffres au milieu du code}}\cdot\underbrace{C_2^1}_{\text{Choix de la 2}^{\text{e}}\text{ lettre}}\cdot\underbrace{3!}_{\text{Nombre de permutations possibles entre les caractères du milieu du code}}\cdot\underbrace{5}_{\text{Choix du chiffre pair à la fin du code}}$$

$=\boxed{2\,160}$