Question théorique

(3+2=5 points)

Voir EM66 pages 57 et 55.

Question 1

(0,5+3,5+2+3+3+3=15 points)

$f(x) = \dfrac{6+5x+x^2}{e^{x+1}}$

a) dom$f$ (= dom$_d f$) = dom $f' = \mathbb{R}$

b) • $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{\overbrace{6+5x+x^2}^{\to+\infty}}{\underbrace{e^{x+1}}_{\to 0^+}} = +\infty$ Asymptote oblique possible en $-\infty$

• $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\overbrace{6+5x+x^2}^{\to+\infty}}{\underbrace{e^{x+1}}_{\to+\infty}}$ f.i. $\dfrac{\infty}{\infty}$

$\displaystyle\overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\overbrace{5+2x}^{\to+\infty}}{\underbrace{e^{x+1}}_{\to+\infty}}$ f.i. $\dfrac{\infty}{\infty}$

$\displaystyle\overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\underbrace{e^{x+1}}_{\to+\infty}} = 0^+$ $\mathscr{C}_f$ admet une A.H. d'équation $y=0$ en $+\infty$

• $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{6+5x+x^2}{e^{x+1}}}{x}$

$\displaystyle= \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{6}{x}+5+x}{e^{x+1}} = -\infty$ $\mathscr{C}_f$ admet une B.P. de direction (Oy) en $-\infty$

c) Position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à l'asymptote horizontale d'équation $y=0$ si $x\to+\infty$:

Il suffit d'étudier le signe de $\dfrac{6+5x+x^2}{\underbrace{e^{x+1}}_{>0}} - 0$.

$\dfrac{6+5x+x^2}{e^{x+1}} = 0 \iff 6+5x+x^2 = 0 \quad \Delta = 1; x_1 = -2; x_2 = -3$

$\forall x > -2, \dfrac{6+5x+x^2}{e^{x+1}} > 0$ et la courbe de f est au-dessus de l'asymptote horizontale.

d) $\forall x \in$ domf' :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x+5)\,e^{x+1} - (x^2+5x+6)\,e^{x+1}}{(e^{x+1})^2} \\ &= \frac{2x+5-x^2-5x-6}{e^{x+1}} \\ &= -\frac{1+3x+x^2}{\underbrace{e^{x+1}}_{>0}} \end{aligned}$$

$$\Delta = 5 \quad x_1 = \frac{-3+\sqrt{5}}{2} \quad x_2 = \frac{-3-\sqrt{5}}{2}$$

x	$-\infty$		$\frac{-3-\sqrt{5}}{2}$		$\frac{-3+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	$+\infty$	$\searrow$	min $\approx -1{,}19$	$\nearrow$	max $\approx 2{,}28$	$\searrow$	0

f admet un minimum en $x = \dfrac{-3-\sqrt{5}}{2}$ de valeur $\approx -1,19$ et

f admet un maximum en $x = \dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}$ de valeur $\approx 2,28$.

e) $\forall x \in \text{dom} f'' = \text{dom} f$:

$$f''(x) = -\frac{(2x+3)\,e^{x+1} - (x^2+3x+1)\,e^{x+1}}{(e^{x+1})^2}$$

$$= -\frac{2x+3-x^2-3x-1}{e^{x+1}}$$

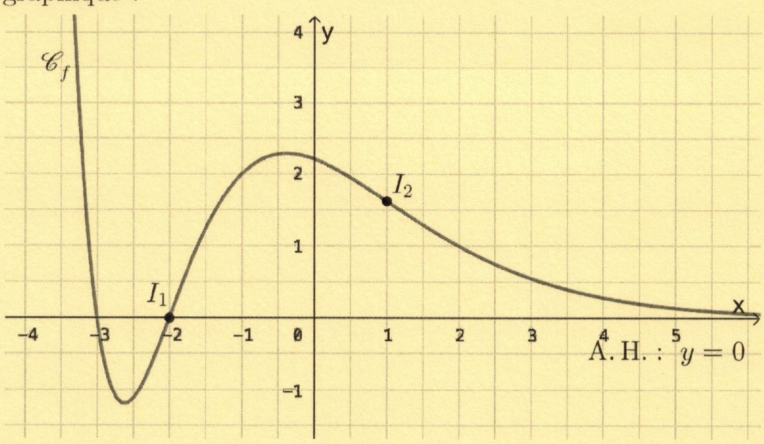
$$= \frac{x^2+x-2}{e^{x+1}}$$

$\Delta = 9 \quad x_1 = -2 \quad x_2 = 1$

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$\mathscr{C}_f$		$\cup$	*P.I.*	$\cap$	*P.I.*	$\cup$	

$\mathscr{C}_f$ admet deux points d'inflexion $I_1(-2;0)$ et $I_2\left(1;\ \underbrace{\frac{12}{e^2}}_{\approx 1,62}\right)$.

f) Représentation graphique :



Question 2 (4+2+4=10 points)

$f(x) = \frac{1}{2}x + 2 - \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$

a) C.E. $\frac{x}{x+1} > 0$ et $x+1 \neq 0$

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{x}{x+1}$		$+$	$\|$	$-$	0	$+$	

$\text{dom}f =]-\infty;-1[\cup]0;+\infty[$

- $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2}x + 2 - \underbrace{\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)}_{\to 0}\right) = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}x + 2 - \underbrace{\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)}_{\to 0}\right) = +\infty$

A.O. possible en $+\infty$ et en $-\infty$.

Comme $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\left(-\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)\right) = 0$ si $|x| \to +\infty$, la droite d'équation $y = \frac{1}{2}x + 2$ est une asymptote oblique à la courbe de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

b) $\forall x \in]-\infty;-1[\cup]0;+\infty[$:

$$\begin{aligned}
-\ln\left(\frac{x}{x+1}\right) > 0 &\iff \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) < 0 \\
&\iff \frac{x}{x+1} < 1 \\
&\iff \frac{x-x-1}{x+1} < 0 \\
&\iff \frac{-1}{x+1} < 0 \\
&\iff x > -1
\end{aligned}$$

On en déduit que pour tout $x > 0$:
$-\ln\left(\frac{x}{x+1}\right) > 0$ et $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de l'A.O.
De même pour tout $x < -1$:
$-\ln\left(\frac{x}{x+1}\right) < 0$ et $\mathscr{C}_f$ est en dessous de l'A.O.

c) $\forall x \in \text{dom}f'(= \text{dom}_d f) = \text{dom}f$:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{2} - \frac{\frac{x+1-x}{(x+1)^2}}{\frac{x}{x+1}} \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{x(x+1)} \\
&= \frac{x^2+x-2}{2x(x+1)}
\end{aligned}$$

$T : y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$
$\iff T : y = f'(2)(x-2) + f(2)$
$\iff T : y = \frac{1}{3}(x-2) + 3 - \ln\left(\frac{2}{3}\right)$
$\iff T : y = \frac{1}{3}x + \frac{7}{3} - \ln\left(\frac{2}{3}\right)$

Question 3

(4+6=10 points)

a) $3^{x+1} - 10 \cdot 3^{2-x} = 3$

domaine de résolution : $D = \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} & 3^{x+1} - 10 \cdot 3^{2-x} = 3 \\ \Longleftrightarrow\ & 3 \cdot 3^x - 10 \cdot 3^2 \cdot 3^{-x} - 3 = 0 \quad | \cdot 3^x \\ \Longleftrightarrow\ & 3 \cdot 3^{2x} - 10 \cdot 3^2 - 3 \cdot 3^x = 0 \\ \Longleftrightarrow\ & (3^x)^2 - 3^x - 30 = 0 \end{aligned}$$

Posons $t = 3^x > 0$:
$t^2 - t - 30 = 0$
$\Delta = 121 \quad \underbrace{t_1 = -5}_{\text{à écarter}} \quad t_2 = 6$
Finalement :
$3^x = 6 \Longleftrightarrow x = \log_3 6$
$\mathcal{S} = \{\log_3 6\}$

b) $\log_3 x - \log_{27}(2x-1) \geqslant 0$

C.E. $x > 0$ et $x > \dfrac{1}{2}$
domaine de résolution : $D = \left]\dfrac{1}{2}; +\infty\right[$

$$\begin{aligned} & \log_3 x - \log_{27}(2x-1) \geqslant 0 \\ \Longleftrightarrow\ & \log_3 x - \frac{1}{3}\log_3(2x-1) \geqslant 0 \quad | \cdot 3 \\ \Longleftrightarrow\ & 3 \cdot \log_3 x - \log_3(2x-1) \geqslant 0 \\ \Longleftrightarrow\ & \log_3 x^3 \geqslant \log_3(2x-1) \text{ bij. strict cr.} \\ \Longleftrightarrow\ & x^3 \geqslant 2x - 1 \\ \Longleftrightarrow\ & \underbrace{x^3 - 2x + 1}_{=P(x)} \geqslant 0 \end{aligned}$$

Schéma de Horner avec la racine évidente $x_0 = 1$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & -2 & 1 \\ \hline 1 & \downarrow & 1 & 1 & -1 \\ \hline & 1 & 1 & -1 & \| \ 0 \end{array}$$

donc $P(x) = (x-1)\left(x^2 + x - 1\right)$

$\Delta = 5$, $x_1 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$, $x_2 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

x	$\frac{1}{2}$		$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$		1		$+\infty$
$x-1$	$\|$	$-$		$-$	0	$+$	
x^2+x-1	$\|$	$-$	0	$+$		$+$	
$P(x)$	$\|$	$+$	0	$-$	0	$+$	

$\mathcal{S} = \left]\dfrac{1}{2}; \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[1; +\infty\right[$

Question 4 (4+4+2=10 points)

a)i.

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+3}\right)^{x+1} \quad \text{f.i. } 1^{\infty}\\
&=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x+3-4}{2x+3}\right)^{x+1}\\
&=\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{-4}{2x+3}\right)^{x+1}\\
&\text{Posons : } n=\frac{2x+3}{-4} \iff x=\frac{-4n-3}{2}\\
&=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{-4n-3}{2}+1}\\
&=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-2n-\frac{1}{2}}\\
&=\lim_{n\to+\infty}\left(\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)^{-2}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\frac{1}{2}}\right)\\
&=e^{-2}=\frac{1}{e^2}
\end{aligned}
$$

ii.

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(\cos(x))}{x^2} \quad \text{f.i.}\frac{0}{0}\\
&\stackrel{H}{=}\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{\cos(x)}\cdot(-\sin(x))}{2x} \quad \text{f.i.}\frac{0}{0}\\
&=\lim_{x\to0^+}\frac{-\tan(x)}{2x} \quad \text{f.i.}\frac{0}{0}\\
&\stackrel{H}{=}\lim_{x\to0^+}\frac{-\left(1+\overbrace{\tan^2(x)}^{\to0}\right)}{2}\\
&=-\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

b) $\mathrm{dom}f\ (=\mathrm{dom}_d f)=\mathrm{dom}\ f'=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$

$f'(x)=2^{\frac{x}{x+2}}\cdot\frac{x+2-x}{(x+2)^2}\ln(2)=2^{\frac{x}{x+2}}\cdot\frac{2\ln(2)}{(x+2)^2}$

Question 5 (3+7=10 points)

a) domaine de résolution : $D = \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} & \frac{e^{1-x}}{e^{x+1}} = 1 + \frac{1}{e^x} \\ \iff & e^{-2x} = 1 + e^{-x} \quad | \cdot e^{2x} \\ \iff & e^0 = e^{2x} + e^x \\ \iff & (e^x)^2 + e^x - 1 = 0 \end{aligned}$$

Posons $t = e^x > 0$
$t^2 + t - 1 = 0$
$\Delta = 5$, $\underbrace{t_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}}_{\text{à écarter}}$, $t_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$
Finalement :
$e^x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \iff x = \ln\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$
$\mathcal{S} = \left\{\ln\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\right\}$

b) $\forall x \in \text{dom} f' (= \text{dom}_d f) = \mathbb{R}$:
$f'(x) = \left(\frac{e^{1-x}}{e^{x+1}}\right)' = \left(e^{-2x}\right)' = -2e^{-2x}$
L'équation réduite de la tangente au point $(a, f(a))$ est de la forme
$T : y = f'(a)(x-a) + f(a)$. Donc :

$$\begin{aligned} A(1;0) \in T \iff & 0 = -2e^{-2a}(1-a) + e^{-2a} \\ \iff & 0 = e^{-2a}(-2 + 2a + 1) \\ \iff & 0 = \underbrace{e^{-2a}}_{>0}(-1 + 2a) \\ \iff & 0 = -1 + 2a \\ \iff & a = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Équation de la tangente au point d'abscisse $a = \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} & T : y = f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) \\ \iff & T : y = -2e^{-1}\left(x - \frac{1}{2}\right) + e^{-1} \\ \iff & T : y = -\frac{2}{e}x + \frac{1}{e} + \frac{1}{e} \\ \iff & T : y = -\frac{2}{e}x + \frac{2}{e} \end{aligned}$$

Question 6

(3+2+5=10 points)

$$\begin{aligned}
A &= \int \frac{1+x}{2x^2+1}dx \\
&= \int \frac{1}{2x^2+1}dx + \int \frac{x}{2x^2+1}dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}x\right)^2+1}dx + \frac{1}{4}\int \frac{4x}{2x^2+1}dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\text{Arctan}(\sqrt{2}x)\right) + \frac{1}{4}\left(\ln(2x^2+1)\right) + c \qquad (c \in \mathbb{R})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B &= \int_0^2 \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+8}}dx \\
&= \int_0^2 \frac{2x+4}{2\sqrt{x^2+4x+8}}dx \\
&= \left[\sqrt{x^2+4x+8}\right]_0^2 \\
&= \sqrt{20} - \sqrt{8} \\
&= 2\sqrt{5} - 2\sqrt{2}
\end{aligned}$$

$$C = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(2x)\cdot e^{-x+1}dx$$

Par parties : $u(x) = \sin(2x)$ $\qquad v'(x) = e^{-x+1}$

$u'(x) = 2\cos(2x)$ $\qquad v(x) = -e^{-x+1}$

$$\iff C = \left[-e^{-x+1}\sin(2x)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2x)\cdot e^{-x+1}dx$$

Par parties : $u(x) = \cos(2x)$ $\qquad v'(x) = e^{-x+1}$

$u'(x) = -2\sin(2x)$ $\qquad v(x) = -e^{-x+1}$

$$\iff C = \left[-e^{-x+1}\sin(2x)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} + 2\left(\left[-e^{-x+1}\cos(2x)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(2x)\cdot e^{-x+1}dx\right)$$

$$\iff C = \left[-e^{-x+1}\sin(2x) - 2e^{-x+1}\cos(2x)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - 4\cdot C$$

$$\iff C = \frac{1}{5}\left[-e^{-x+1}\left(\sin(2x)+2\cos(2x)\right)\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$\iff C = \frac{1}{5}\left(-e^{1-\frac{\pi}{4}} + 2e\right)$$

$$\iff C = \frac{e\left(2-e^{-\frac{\pi}{4}}\right)}{5} \approx 0,84$$

Question 7 (5+5=10 points)

$f(x) = 1 + \dfrac{-x^2+3x+1}{x^3-2x^2+x}$ avec $\text{dom}f = \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$.

a) $\dfrac{-x^2+3x+1}{x^3-2x^2+x} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x-1} + \dfrac{c}{(x-1)^2}$.

En multipliant les deux membres de l'égalité par $x^3 - 2x^2 + x = x \cdot (x-1)^2$, on obtient :
$-x^2 + 3x + 1 = a \cdot (x-1)^2 + b \cdot x \cdot (x-1) + c \cdot x = (a+b)x^2 + (-2a - b + c)x + a$.
D'où le système :

$$\begin{cases} a+b & = -1 \\ -2a - b + c & = 3 \\ a & = 1 \end{cases}$$

On en déduit $a = 1, b = -2$ et $c = 3$ et $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x-1} + \dfrac{3}{(x-1)^2}$

b)

$$\begin{aligned} F(x) &= \int f(x)dx \\ &= \int \left(1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x-1} + \frac{3}{(x-1)^2}\right) dx \\ &= \int 1dx + \int \frac{1}{x}dx - 2\int \frac{1}{x-1}dx + 3\int \frac{1}{(x-1)^2}dx \\ &= x + \ln|x| - 2\ln|x-1| - \frac{3}{x-1} + c \quad (c \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

Déterminons c :

$F(-1) = -2\ln(2) \iff -1 + \overbrace{\ln|-1|}^{=0} - 2\ln|-2| + \dfrac{3}{2} + c = -2\ln(2) \iff c = -\dfrac{1}{2}$.

On trouve sur $I =]-\infty; 0[$:

$F(x) = x + \ln|x| - 2\ln|x-1| - \dfrac{3}{x-1} - \dfrac{1}{2}$

Question 8

(3+(3+4)=10 points)

a) $f(x) = x \cdot \ln\left(\frac{x}{2}\right)$

$$A = -\int_1^2 x \cdot \ln\left(\frac{x}{2}\right) dx = \int_2^1 x \cdot \ln\left(\frac{x}{2}\right) dx$$

Par parties : $u(x) = \ln\left(\frac{x}{2}\right)$ $\qquad v'(x) = x$

$u'(x) = \frac{1}{x}$ $\qquad v(x) = \frac{x^2}{2}$

$$= \left[\frac{x^2}{2} \cdot \ln\left(\frac{x}{2}\right)\right]_2^1 - \int_2^1 \frac{x}{2} dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} \cdot \ln\left(\frac{x}{2}\right)\right]_2^1 - \left[\frac{x^2}{4}\right]_2^1$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} \cdot \left(\ln\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{2}\right)\right]_2^1$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\ln\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\right) - 2\left(\ln(1) - \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{3}{4} \text{ u.a}$$

b) $f(x) = -x^3 + 3x^2$ et $d : y = -x + 3$

i. Pour déterminer les points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ avec $\mathscr{C}_g$, on doit résoudre l'équation suivante :
$f(x) = g(x) \iff -x^3 + 3x^2 = -x + 3 \iff -x^3 + 3x^2 + x - 3 = 0$

Schéma de Horner avec la racine évidente $x_0 = 1$:

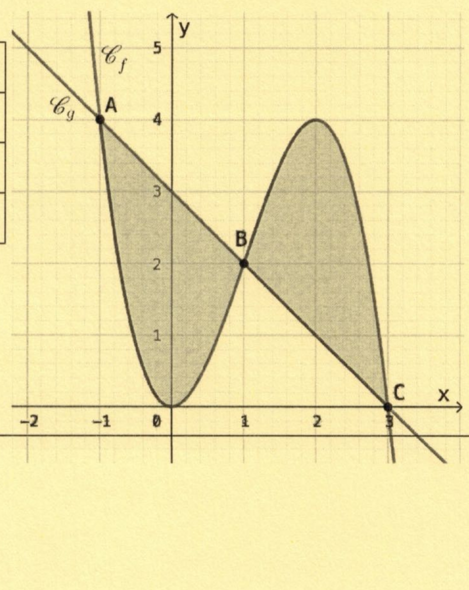
	-1	3	1	-3
1	$\downarrow$	-1	2	3
	-1	2	3	$\Vert\ 0$

Donc : $\underbrace{-x^3 + 3x^2 + x - 3}_{f(x)-g(x)} = 0 \iff (x-1)\underbrace{\left(-x^2 + 2x + 3\right)}_{\Delta=16 \quad x_1=-1; \quad x_2=3} = 0$

Les points d'intersection sont donnés par : $A(-1;4)$, $B(1;2)$ et $C(3;0)$.

Position relative de $\mathscr{C}_f$ avec $\mathscr{C}_g$:

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$-x^2+2x+3$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)-g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	



$f \leqslant g$ sur $[-1;1]$ et $f \geqslant g$ sur $]1;3]$.

ii.

$$\begin{aligned}
V &= \pi \cdot \left(\int_{-1}^{1} \left(g^2(x) - f^2(x) \right) dx + \int_{1}^{3} \left(f^2(x) - g^2(x) \right) dx \right) \\
&= \pi \cdot \left(\int_{-1}^{1} \left((-x+3)^2 - \left(-x^3 + 3x^2 \right)^2 \right) dx + \int_{1}^{3} \left(\left(-x^3 + 3x^2 \right)^2 - (-x+3)^2 \right) dx \right) \\
&= \pi \cdot \left(\int_{-1}^{1} \left(x^2 - 6x + 9 - x^6 + 6x^5 - 9x^4 \right) dx + \int_{1}^{3} \left(x^6 - 6x^5 + 9x^4 - x^2 + 6x - 9 \right) dx \right) \\
&= \pi \cdot \left(\int_{-1}^{1} \left(-x^6 + 6x^5 - 9x^4 + x^2 - 6x + 9 \right) dx - \int_{1}^{3} \left(-x^6 + 6x^5 - 9x^4 + x^2 - 6x + 9 \right) dx \right) \\
&= \pi \cdot \left(\left[-\frac{1}{7}x^7 + x^6 - \frac{9}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 9x \right]_{-1}^{1} - \left[-\frac{1}{7}x^7 + x^6 - \frac{9}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 9x \right]_{1}^{3} \right) \\
&= \pi \cdot \left(\left(\frac{566}{105} - \frac{-986}{105} \right) - \left(-\frac{414}{35} - \frac{566}{105} \right) \right) \\
&= 32\pi \text{ u.v.}
\end{aligned}$$