LE GOUVERNEMENT DU GRAND-DUCHÉ DE LUXEMBOURG
Ministère de l'Éducation nationale, de l'Enfance et de la Jeunesse

EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES CLASSIQUES 2020

CORRIGÉ – BARÈME

BRANCHE	SECTION(S)	ÉPREUVE ÉCRITE	
Mathématiques II	**B**	*Durée de l'épreuve :*	*260 min*
		Date de l'épreuve :	*15/09/2020*

Partie obligatoire (48 points)

Question 1

$$f(x) = -3 + \frac{2-x}{2} \cdot e^{\left(\frac{-2}{x+2}\right)}$$

a) CE : $x + 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -2$

$\operatorname{dom} f = \mathbb{R}\backslash\{-2\} = \operatorname{dom}_C f$ **(0,5 pt)**

b) $$\lim_{x\to(-2)^-} f(x) = \lim_{x\to(-2)^-}\left(-3 + \underbrace{\frac{2-x}{2}}_{\to 2} \underbrace{e^{\overbrace{\left(\frac{-2}{x+2}\right)}^{\to+\infty}}}_{\to+\infty}\right) = +\infty$$

C_f admet une A.V. $v \equiv x = -2$. **(0,5 pt)**

$$\lim_{x\to(-2)^+} f(x) = \lim_{x\to(-2)^+}\left(-3 + \underbrace{\frac{2-x}{2}}_{\to 2} \underbrace{e^{\overbrace{\left(\frac{-2}{x+2}\right)}^{\to-\infty}}}_{\to 0}\right) = -3$$ **(0,5 pt)**

C_f admet $(-2\,;-3)$ comme point-limite.

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(-3 + \underbrace{\frac{2-x}{2}}_{\to\mp\infty} \underbrace{e^{\overbrace{\left(\frac{-2}{x+2}\right)}^{\to 0}}}_{\to 1}\right) = \mp\infty$$ **(0,5 pt)**

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\underbrace{-\frac{3}{x}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{2-x}{2x}}_{\to-\frac{1}{2}} \underbrace{e^{\overbrace{\left(\frac{-2}{x+2}\right)}^{\to 0}}}_{\to 1}\right) = -\frac{1}{2}$$ **(0,5 pt)**

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x) + \frac{x}{2}\right]$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty}\left[-3 + \underbrace{\underbrace{\frac{2-x}{2}}_{\to\mp\infty} \underbrace{e^{\overbrace{\left(\frac{-2}{x+2}\right)}^{\to 0}}}_{\to 1}}_{\to\mp\infty} + \underbrace{\frac{x}{2}}_{\to\pm\infty}\right] \quad \text{F.I.: } \infty-\infty$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty}\left[-3 + \left(1 - \frac{x}{2}\right) e^{\left(\frac{-2}{x+2}\right)} + \frac{x}{2}\right]$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty}\left[-3 + \underbrace{e^{\left(\frac{-2}{x+2}\right)}}_{\to 1} \underbrace{- \frac{x}{2} e^{\left(\frac{-2}{x+2}\right)} + \frac{x}{2}}_{\to 1 \text{ (calcul à part)}}\right]$$

$= -1$ **(1 pt)**

Calcul à part :

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left[\underbrace{-\frac{x}{2} e^{\left(\frac{-2}{x+2}\right)}}_{\to\mp\infty} + \underbrace{\frac{x}{2}}_{\pm\infty}\right] \quad (\text{F.I.: } \infty - \infty)$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \underbrace{\frac{x}{2}}_{\to\pm\infty} \underbrace{\left[\underbrace{-e^{\left(\frac{-2}{x+2}\right)}}_{\to-1} + 1\right]}_{\to 0} \quad (\text{F.I.: } \infty \cdot 0)$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-e^{\left(\frac{-2}{x+2}\right)} + 1}{\frac{2}{x}} \quad \left(\text{F.I.: } \frac{0}{0}\right)$$

$$\overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-e^{\left(\frac{-2}{x+2}\right)} \cdot \frac{2}{(x+2)^2}}{-\frac{2}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} e^{\left(\frac{-2}{x+2}\right)} \frac{x^2}{(x+2)^2}$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \underbrace{e^{\left(\frac{-2}{x+2}\right)}}_{\to 1} \underbrace{\frac{x^2}{x^2+4x+4}}_{\to 1}$$

$= 1$ **(2 pts)**

Conclusion :

C_f admet une A.O. $d \equiv y = -\frac{x}{2} - 1$ en $+\infty$ et en $-\infty$. **(0,5 pt)**

c) $\forall x \in \operatorname{dom} f' = \operatorname{dom} f$: **(2 pts)**

$$f'(x) = \left[-3 + \frac{2-x}{2} e^{\left(\frac{-2}{x+2}\right)}\right]'$$

$$= -\frac{1}{2} e^{\left(\frac{-2}{x+2}\right)} + \frac{2-x}{2} e^{\left(\frac{-2}{x+2}\right)} \frac{2}{(x+2)^2}$$

$$= \left[-\frac{1}{2} + \frac{(2-x)\cdot 2}{2(x+2)^2}\right] e^{\left(\frac{-2}{x+2}\right)}$$

$$= \frac{-x^2 - 4x - 4 + 4 - 2x}{2(x+2)^2} e^{\left(\frac{-2}{x+2}\right)}$$

$$= \frac{-x^2-6x}{2(x+2)^2} e^{\left(\frac{-2}{x+2}\right)}$$

$$= \frac{-x(x+6)}{\underbrace{2(x+2)^2}_{>0}} \underbrace{e^{\left(\frac{-2}{x+2}\right)}}_{>0}$$

Tableau de variation : **(1 pt)**

x	$-\infty$		-6		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\|$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	min 3,59	$\nearrow$	$+\infty$ $\|$ -3	$\nearrow$	-2.63 max	$\searrow$	$-\infty$

$f(-6) = -3 + 4\sqrt{e} \approx 3{,}59$

$f(0) = -3 + \frac{1}{e} \approx -2{,}63$

d) $\operatorname{dom} f'' = \operatorname{dom} f$

$\forall x \in \operatorname{dom} f''$: **(3 pts)**

$f''(x)$

$$= \left[\frac{-x^2-6x}{2(x+2)^2} e^{\left(\frac{-2}{x+2}\right)}\right]'$$

$$= \underbrace{\frac{x-6}{(x+2)^3}}_{\text{calcul à part}} e^{\left(\frac{-2}{x+2}\right)} + \frac{-x^2-6x}{\cancel{2}(x+2)^2} e^{\left(\frac{-2}{x+2}\right)} \frac{\cancel{2}}{(x+2)^2}$$

$$= \left[\frac{(x-6)(x+2)}{(x+2)^4} + \frac{-x^2-6x}{(x+2)^4}\right] e^{\left(\frac{-2}{x+2}\right)}$$

$$= \frac{\cancel{x^2} - 4x - 12 \cancel{- x^2} - 6x}{(x+2)^4} e^{\left(\frac{-2}{x+2}\right)}$$

$$= \frac{-10x-12}{\underbrace{(x+2)^4}_{>0}} \underbrace{e^{\left(\frac{-2}{x+2}\right)}}_{>0}$$

Calcul à part :

$$\left[\frac{-x^2-6x}{2(x+2)^2}\right]'$$

$$= \frac{(-2x-6)2(x+2)^2 - (-x^2-6x)4(x+2)}{4(x+2)^4}$$

$$= \frac{(-x-3)(x+2) - (-x^2-6x)}{(x+2)^3}$$

$$= \frac{\cancel{-x^2} - 2x - 3x - 6 \cancel{+ x^2} + 6x}{(x+2)^3}$$

$$= \frac{x-6}{(x+2)^3}$$

Tableau de concavité : **(1 pt)**

x	$-\infty$		-2		$-\frac{6}{5}$		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	$\|$	$+$	0	$-$	
concavité de C_f		haut	$\|$	haut	P.I.	bas	

$f\left(-\frac{6}{5}\right) = -3 + \frac{8}{5\sqrt{e^5}} \approx -2{,}87$

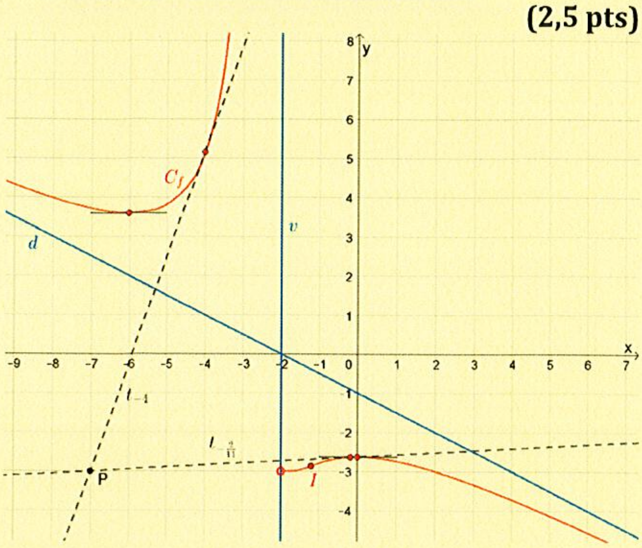
Point d'inflexion : $I(-1{,}20\,; -2{,}87)$ **(0,5 pt)**

e) Tableau de valeurs :

x	-9	-7	-4	-3,5	-1
$f(x)$	4,32	3,71	5,15	7,43	-2,80

x	1	3	5	6
$f(x)$	−2,74	−3,33	−4,13	−4,56

(2,5 pts)



f) Équation de la tangente en $a \in \operatorname{dom} f'$:

$t_a \equiv y = f(a) + f'(a)(x-a)$

On a alors :

$P(-7\,;-3) \in t_a$

$\Leftrightarrow -3 = f(a) + f'(a)(-7-a)$

$$\Leftrightarrow \cancel{-3} = \cancel{-3} + \frac{2-a}{2} e^{\left(\frac{-2}{a+2}\right)} + \frac{-a(a+6)}{2(a+2)^2} e^{\left(\frac{-2}{a+2}\right)}(-7-a)$$

$$\Leftrightarrow 0 = \left[\frac{2-a}{2} + \frac{(-a^2-6a)(-7-a)}{2(a+2)^2}\right] \underbrace{e^{\left(\frac{-2}{a+2}\right)}}_{>0}$$

$$\Leftrightarrow 0 = \frac{(2-a)(a+2)^2 + 7a^2 + a^3 + 42a + 6a^2}{2(a+2)^2}$$

$$\Leftrightarrow 0 = 2a^2 + 8a + 8 \cancel{- a^3} - 4a^2 - 4a + 13a^2 \cancel{+ a^3} + 42a$$

$\Leftrightarrow 0 = 11a^2 + 46a + 8 \quad (\Delta = 1764 = 42^2)$

$$\Leftrightarrow a = \frac{-46-42}{22} \quad \text{ou} \quad a = \frac{-46+42}{22}$$

$\Leftrightarrow \underline{a = -4}$ ou $\underline{a = -\frac{2}{11} \approx -0{,}18}$ **(2,5 pts)**

Conclusion :

C_f admet deux tangentes passant par le point $P(-7\,;-3)$.

Équation des tangentes : **(1,5 pt)**

$f(-4) = -3 + 3e \approx 5{,}15$

$f'(-4) = e$

$f\left(-\frac{2}{11}\right) = -3 + \frac{12}{11} e^{-\frac{11}{10}} \approx -2{,}64$

$f'\left(-\frac{2}{11}\right) = \frac{4}{25} e^{-\frac{11}{10}}$

On obtient :

$t_{-4} \equiv y = -3 + 3e + e(x+4)$

$\Leftrightarrow \underline{t_{-4} \equiv y = ex + 7e - 3}$

$t_{-\frac{2}{11}} \equiv y = -3 + \frac{12}{11} e^{-\frac{11}{10}} + \frac{4}{25} e^{-\frac{11}{10}} \left(x + \frac{2}{11}\right)$

$\Leftrightarrow \underline{t_{-\frac{2}{11}} \equiv y = \frac{4}{25} e^{-\frac{11}{10}} \cdot x + \frac{28}{25} e^{-\frac{11}{10}} - 3}$

(0,5+5,5+3+4,5+2,5+4) *20 points*

Question 2

a) Conditions d'existence :

α) $(2^x+1)^2 > 0 \Leftrightarrow \underbrace{2^x}_{>0} \neq -1$; toujours vrai

β) $3 - 2^x > 0 \Leftrightarrow 2^x < 2^{\log_2 3} \Leftrightarrow x < \log_2 3$

Domaine d'existence : $D =]-\infty\,; \log_2 3[$

$\forall x \in D$: **(5 pts)**

$1 + x + \log_4(2^x+1)^2 \leq \log_{\sqrt{2}} \sqrt{3-2^x} - \log_2 3$

$\Leftrightarrow \log_2 2 + \log_2 3 + \log_2 2^x + \frac{\log_2(2^x+1)^2}{\log_2 4} \leq \frac{\log_2 \sqrt{3-2^x}}{\log_2 \sqrt{2}}$

$\Leftrightarrow \log_2(6 \cdot 2^x) + \frac{1}{2} \cdot 2\log_2(2^x+1) \leq 2 \cdot \frac{1}{2} \log_2(3-2^x)$

$\Leftrightarrow \log_2[6 \cdot 2^x(2^x+1)] \leq \log_2(3-2^x)$

$\Leftrightarrow \quad 6 \cdot 2^x(2^x+1) \leq 3 - 2^x$

(car $\log_2$ est une bij. str. cr.)

$\Leftrightarrow \quad 6y(y+1) \leq 3 - y$

(en posant $y = 2^x > 0$)

$\Leftrightarrow \quad 6y^2 + 7y - 3 \leq 0$

$\Delta = 49 + 72 = 121 > 0$

$y_1 = \frac{-7-11}{12} = -\frac{3}{2}$; $y_2 = \frac{-7+11}{12} = \frac{1}{3}$

$\Leftrightarrow -\frac{3}{2} \leq y \leq \frac{1}{3}$

$\Leftrightarrow \quad y \leq \frac{1}{3} \quad \left(\text{car } y \geq -\frac{3}{2} \text{ est toujours vrai}\right)$

$\Leftrightarrow 2^x \leq 2^{\log_2 \frac{1}{3}}$

$\Leftrightarrow \quad x \leq -\log_2 3$ (car $\exp_2$ est une bij. str. cr.)

$S =]-\infty\,; -\log_2 3] \cap D =]-\infty\,; -\log_2 3]$

b) **i)**

$\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$ **(0,5 pt)**

<u>Continuité en 0:</u> **(2 pts)**

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} -\sqrt{-x} + 1 + \ln(x^2+1) = 1$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{\overbrace{x\ln x}^{\to 0}} = 1$

Calcul à part :

$\lim\limits_{x\to 0^+} \underbrace{x}_{\to 0} \underbrace{\ln x}_{\to -\infty} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\overbrace{\ln x}^{\to -\infty}}{\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to +\infty}}$

$\overset{H}{=} \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}$

$= \lim\limits_{x\to 0^+} (-x)$

$= 0$

Comme $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1 = f(0)$, f est continue en 0.

Donc : $\operatorname{dom}_C f = \mathbb{R}$

ii)

<u>Dérivabilité en 0 :</u> **(2)**

$\forall x < 0$: $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{-x}} + \frac{2x}{x^2+1}$

$\forall x > 0$: $f'(x) = e^{x\ln x}(\ln x + 1)$

$\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \quad \left(\text{F.I.: } \frac{0}{0}\right)$

$\overset{H}{=} \lim\limits_{x\to 0^-} f'(x)$

$= \lim\limits_{x\to 0^-} \left(\underbrace{\frac{1}{2\sqrt{-x}}}_{\to +\infty} + \underbrace{\frac{2x}{x^2+1}}_{\to 0} \right)$

$= +\infty$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \quad \left(\text{F.I.: } \frac{0}{0}\right)$

$\overset{H}{=} \lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)$

$= \lim\limits_{x\to 0^+} \underbrace{e^{\overbrace{x\ln x}^{\to 0}}}_{\to 1} \underbrace{(\ln x + 1)}_{\to -\infty}$

$= -\infty$

Conclusion :

f n'est pas dérivable en 0.

$\operatorname{dom}_d f = \operatorname{dom} f' = \mathbb{R}_0$

On a :

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{-x}} + \frac{2x}{x^2+1} & \text{si } x < 0 \\ e^{x\ln x}(\ln x + 1) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

<u>Interprétation graphique :</u> **(0,5 pt)**

Le point $R(0\,;1)$ est un point de rebroussement.

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\underbrace{\cos\overbrace{(e^x)}^{\to 0}}_{\to 1}\right]^{\overbrace{e^{-x}}^{\to+\infty}}$ (F.I.: 1^∞)

$= \lim\limits_{x\to-\infty} e^{\overbrace{e^{-x}\ln[\cos(e^x)]}^{\to 0}}$

$= 1$ **(2 pts)**

Calcul à part :

$\lim\limits_{x\to-\infty} \underbrace{e^{-x}}_{\to+\infty}\underbrace{\ln[\cos(e^x)]}_{\to 0}$ (F.I.: $\infty\cdot 0$)

$= \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln[\cos(e^x)]}{e^x}$ $\left(\text{F.I.: }\dfrac{0}{0}\right)$

$\overset{H}{=} \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\dfrac{-\sin(e^x)\cdot e^x}{\cos(e^x)}}{e^x}$

$= \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\overbrace{-\sin(e^x)}^{\to 0}\cdot\cancel{e^x}}{\underbrace{\cos(e^x)}_{\to 1}\cdot\cancel{e^x}}$

$= 0$

(5+(2,5+2,5)+2) 12 points

Question 3

a) $\forall x\in\mathbb{R}\backslash\{-3\}$:

$$\frac{3x+2}{(x+3)(x^2-3x+3)}=\frac{a}{x+3}+\frac{bx+c}{x^2-3x+3}$$

$$\Leftrightarrow 3x+2 \overset{(*)}{=} a(x^2-3x+3)+(bx+c)(x+3)$$

L'égalité (*) est également vraie pour $x=-3$.

- $x=-3$ dans (*) :

  $-7=21a \Leftrightarrow \underline{a=-\frac{1}{3}}$

- $x=0$ et $a=-\frac{1}{3}$ dans (*) :

  $2=-1+3c \Leftrightarrow \underline{c=1}$

- $x=1$, $a=-\frac{1}{3}$ et $c=1$ dans (*) :

  $5=-\frac{1}{3}+4b+4 \Leftrightarrow 4b=\frac{4}{3} \Leftrightarrow \underline{b=\frac{1}{3}}$

D'où : **(2 pts)**

$\forall x\in\mathbb{R}\backslash\{-3\}$:

$$\frac{3x+2}{(x+3)(x^2-3x+3)}=\frac{-\frac{1}{3}}{x+3}+\frac{\frac{1}{3}x+1}{x^2-3x+3}$$

b) $\displaystyle\int\frac{3x+2}{(x+3)(x^2-3x+3)}\,dx$ **(4 pts)**

$= -\dfrac{1}{3}\displaystyle\int\frac{1}{x+3}\,dx+\frac{1}{3}\int\frac{x+3}{x^2-3x+3}\,dx$

$= -\dfrac{1}{3}\ln\Big|\underbrace{x+3}_{<0}\Big|+\dfrac{1}{6}\displaystyle\int\frac{2x-3+3+6}{x^2-3x+3}\,dx$

$= -\dfrac{1}{3}\ln(-x-3)+\dfrac{1}{6}\displaystyle\int\underbrace{\frac{2x-3}{x^2-3x+3}}_{\frac{u'}{u}}\,dx$

$\quad + \dfrac{1}{6}\displaystyle\int\frac{9}{x^2-3x+3}\,dx$

$= -\dfrac{1}{3}\ln(-x-3)+\dfrac{1}{6}\ln\Big|\underbrace{x^2-3x+3}_{>0}\Big|$

$\quad +\dfrac{9}{6}\displaystyle\int\frac{1}{x^2-2\cdot x\cdot\frac{3}{2}+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}+3}\,dx$

$= -\dfrac{1}{3}\ln(-x-3)+\dfrac{1}{6}\ln(x^2-3x+3)$

$\quad +\dfrac{3}{2}\displaystyle\int\frac{1}{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,dx$

$= -\dfrac{1}{3}\ln(-x-3)+\dfrac{1}{6}\ln(x^2-3x+3)$

$\quad +\dfrac{3}{2}\displaystyle\int\frac{1}{\frac{3}{4}\left[1+\frac{4}{3}\left(x-\frac{3}{2}\right)^2\right]}\,dx$

$= -\dfrac{1}{3}\ln(-x-3)+\dfrac{1}{6}\ln(x^2-3x+3)$

$\quad +\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\displaystyle\int\underbrace{\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1+\left(\frac{2x-3}{\sqrt{3}}\right)^2}}_{\frac{u'}{1+u^2}}\,dx$

$= -\dfrac{1}{3}\ln(-x-3)+\dfrac{1}{6}\ln(x^2-3x+3)$

$\quad +\sqrt{3}\,\text{Arctan}\left(\dfrac{2x-3}{\sqrt{3}}\right)+k\quad (k\in\mathbb{R})$

(2+4) 6 points

Question 4

a) $\displaystyle\int\frac{1+\tan^2 x}{(1+\tan x)^4}\,dx$

$= \displaystyle\int\underbrace{(1+\tan^2 x)}_{u'}\underbrace{(1+\tan x)^{-4}}_{u^{-4}}\,dx$

$= \dfrac{(1+\tan x)^{-3}}{-3}+k$ **(1 pt)**

$= -\dfrac{1}{3(1+\tan x)^3}+k\quad (k\in\mathbb{R})$

b) $\displaystyle\int_2^3 x^2(3-x)^5\,dx$

Posons : $t=3-x \Leftrightarrow x=3-t$

On a alors :

$\dfrac{dx}{dt}=-1 \Leftrightarrow dx=-dt$

$x = 2 \Leftrightarrow t = 1$; $x = 3 \Leftrightarrow t = 0$

On obtient alors : **(2 pts)**

$$\int_1^0 (3-t)^2 t^5 (-dt)$$
$$= \int_0^1 (9 - 6t + t^2) t^5 \, dt$$
$$= \int_0^1 (9t^5 - 6t^6 + t^7) dt$$
$$= \left[\frac{3}{2}t^6 - \frac{6}{7}t^7 + \frac{1}{8}t^8\right]_0^1$$
$$= \frac{3}{2} - \frac{6}{7} + \frac{1}{8}$$
$$= \frac{43}{56} \ (\approx 0{,}77)$$

<u>Autre méthode (IPP):</u>

$$\int_2^3 x^2 (3-x)^5 dx$$

$u(x) = x^2$	$v'(x) = (3-x)^5$
$u'(x) = 2x$	$v(x) = -\frac{1}{6}(3-x)^6$

$$\underbrace{=}_{\text{ipp}} \left[-\frac{x^2}{6}(3-x)^6\right]_2^3 + \frac{1}{3}\int_2^3 x(3-x)^6 dx$$

$u(x) = x$	$v'(x) = (3-x)^6$
$u'(x) = 1$	$v(x) = -\frac{1}{7}(3-x)^7$

$$\underbrace{=}_{\text{ipp}} \frac{2}{3} - \frac{1}{21}[x(3-x)^7]_2^3 + \frac{1}{21}\int_2^3 (3-x)^7 dx$$
$$= \frac{2}{3} + \frac{2}{21} + \frac{1}{21}\left[-\frac{1}{8}(3-x)^8\right]_2^3$$
$$= \frac{16}{21} + \frac{1}{168}$$
$$= \frac{43}{56} \ (\approx 0{,}77)$$

c) $\displaystyle\int \sin 3x \cdot \cos^4 2x \ dx$

$$= \int \sin 3x \cdot (\cos^2 2x)^2 dx$$
$$= \int \sin 3x \cdot \left[\frac{1}{2}(1 + \cos 4x)\right]^2 dx$$
$$= \int \sin 3x \cdot \frac{1}{4}(1 + 2\cos 4x + \cos^2 4x) dx$$
$$= \int \sin 3x \cdot \frac{1}{4}\left[1 + 2\cos 4x + \frac{1}{2}(1 + \cos 8x)\right] dx$$
$$= \int \sin 3x \cdot \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2} + 2\cos 4x + \frac{1}{2}\cos 8x\right) dx$$
$$= \int \left(\frac{3}{8}\sin 3x + \frac{1}{2}\sin 3x \cdot \cos 4x + \frac{1}{8}\sin 3x \cdot \cos 8x\right) dx$$
$$= \int \left(\frac{3}{8}\sin 3x + \frac{1}{4}\sin 7x - \frac{1}{4}\sin x + \frac{1}{16}\sin 11x - \frac{1}{16}\sin 5x\right) dx$$
$$= -\frac{1}{8}\cos 3x - \frac{1}{28}\cos 7x + \frac{1}{4}\cos x - \frac{1}{176}\cos 11x + \frac{1}{80}\cos 5x + k \quad (k \in \mathbb{R})$$ **(4 pts)**

d) $\displaystyle\int_{-\ln 2}^0 e^x \cdot \text{Arccos}(1 - e^x) \, dx$

Posons : $t = 1 - e^x \Leftrightarrow e^x = 1 - t > 0$
$\Leftrightarrow x = \ln(1-t)$

On a alors :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{-1}{1-t} \Leftrightarrow dx = \frac{-1}{1-t}dt$$

$x = -\ln 2 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$; $x = 0 \Leftrightarrow t = 0$

On obtient alors : **(3 pts)**

$$\int_{\frac{1}{2}}^0 \cancel{(1-t)} \cdot \text{Arccos}\, t \cdot \frac{-1}{\cancel{1-t}} \ dt$$
$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \text{Arccos}\, t \ \ dt$$

$u(t) = \text{Arccos}\, t$	$v'(t) = 1$
$u'(t) = \frac{-1}{\sqrt{1-t^2}}$	$v(t) = t$

$$= [t \cdot \text{Arccos}\, t]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} \underbrace{\frac{-2t}{2\sqrt{1-t^2}}}_{\frac{u'}{2\sqrt{u}}} dt$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{3} - 0 - \left[\sqrt{1-t^2}\right]_0^{\frac{1}{2}}$$
$$= \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \ (\approx 0{,}66)$$

(1+2+4+3) 10 points

Partie au choix (12 points)

Question 5

a) $\int \frac{\ln x}{x^3} dx$

$= \int x^{-3} \cdot \ln x \, dx$

$$\boxed{\begin{array}{ll} u(x) = \ln x & v'(x) = x^{-3} \\ u'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} & v(x) = \frac{x^{-2}}{-2} \end{array}}$$

$\underset{\text{ipp}}{=} -\frac{1}{2x^2}\ln x + \frac{1}{2}\int x^{-3}\,dx$

$= -\frac{1}{2x^2}\ln x - \frac{1}{4x^2} + k \quad (k \in \mathbb{R})$ **(2 pts)**

b) i) **(1,5 pt)**

On a: $(2x+3)(3x-2) = 6x^2 + 5x - 6$

Pour tout x qui n'annule pas les dénominateurs, on a :

$\frac{13}{6x^2+5x-6} \underset{(*)}{=} \frac{a}{2x+3} + \frac{b}{3x-2} \quad |\cdot (2x+3)(3x-2)$

$\Leftrightarrow \quad 13 \overset{\wedge}{=} a(3x-2) + b(2x+3)$

L'égalité (*) reste vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$.

$x = -\frac{3}{2}$ dans (*): $13 = a \cdot \left(-\frac{13}{2}\right) \Leftrightarrow \underline{a = -2}$

$x = \frac{2}{3}$ dans (*): $13 = b \cdot \frac{13}{3} \Leftrightarrow \underline{b = 3}$

D'où :

$$\frac{13}{6x^2+5x-6} = \frac{-2}{2x+3} + \frac{3}{3x-2}$$

ii) **(3,5 pts)**

$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{13}{5\sin x - 12\cos x}dx$

Posons: $t = \tan\frac{x}{2} \Leftrightarrow x = 2\,\text{Arctan}\,t$

On a alors :

$\frac{dx}{dt} = \frac{2}{1+t^2} \Leftrightarrow dx = \frac{2}{1+t^2}dt$

$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \quad ; \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

$x = -\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow t = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$

$x = 0 \Leftrightarrow t = \tan 0 = 0$

D'où :

$I = \int_{-1}^{0} \frac{13}{5\cdot\frac{2t}{1+t^2} - 12\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}dt$

$= \int_{-1}^{0} \frac{26}{10t - 12 + 12t^2}dt$

$= \int_{-1}^{0} \frac{13}{6t^2+5t-6}dt$

$= \int_{-1}^{0} \left(\frac{-2}{2t+3} + \frac{3}{3t-2}\right)dt \quad$ (par i))

$= [-\ln|2t+3| + \ln|3t-2|]_{-1}^{0}$

$= (-\ln 3 + \ln 2) - (-0 + \ln 5)$

$= \ln 2 - \ln 3 - \ln 5$

$\approx -2{,}01$

c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \cdot e^{3x}dx$

$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2x)e^{3x}dx$

$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{3x}dx + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x \cdot e^{3x}dx$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}e^{3x}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{3}{13}\cos 2x + \frac{2}{13}\sin 2x\right)e^{3x}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}e^{\frac{3\pi}{2}} - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{13}e^{\frac{3\pi}{2}} - \frac{3}{13}\right)$

$= \frac{1}{6}e^{\frac{3\pi}{2}} - \frac{1}{6} - \frac{3}{26}e^{\frac{3\pi}{2}} - \frac{3}{26}$

$= \frac{2}{39}e^{\frac{3\pi}{2}} - \frac{11}{39}$

$\approx 5{,}43$ **(2 pts)**

<u>Calcul à part :</u> **(3 pts)**

$F(x) = \int \cos 2x\, e^{3x}dx$

$$\boxed{\begin{array}{ll} u(x) = \cos 2x & v'(x) = e^{3x} \\ u'(x) = -2\sin 2x & v(x) = \frac{1}{3}e^{3x} \end{array}}$$

$\underset{\text{ipp}}{=} \frac{1}{3}\cos 2x \cdot e^{3x} + \frac{2}{3}\int \sin 2x \cdot e^{3x}dx$

$$\boxed{\begin{array}{ll} u(x) = \sin 2x & v'(x) = e^{3x} \\ u'(x) = 2\cos 2x & v(x) = \frac{1}{3}e^{3x} \end{array}}$$

$\underset{\text{ipp}}{=} \frac{1}{3}\cos 2x \cdot e^{3x} + \frac{2}{9}\sin 2x \cdot e^{3x} - \frac{4}{9}\underbrace{\int \cos 2x \cdot e^{3x}dx}_{=F(x)}$

On a donc :

$F(x) = \left(\frac{1}{3}\cos 2x + \frac{2}{9}\sin 2x\right)e^{3x} - \frac{4}{9}F(x) \quad \Big| + \frac{4}{9}F(x)$

$\Leftrightarrow \frac{13}{9}F(x) = \left(\frac{1}{3}\cos 2x + \frac{2}{9}\sin 2x\right)e^{3x} \quad \Big| \cdot \frac{9}{13}$

$$\Leftrightarrow F(x) = \left(\frac{3}{13}\cos 2x + \frac{2}{13}\sin 2x\right)e^{3x}$$

(2+(1,5+3,5)+5) *12 points*

Question 6

a) $f(x) = x \cdot \underbrace{e^{\text{Arcsin}\, x}}_{>0}$

dom $f = [-1\,;1]$

x	-1		0		1
$f(x)$		$-$	0	$+$	

Aire cherchée : **(0,5 pt)**

$$A = -\int_{-1}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{1} f(x)dx$$

Calcul d'une primitive : **(4 pts)**

$$\int x \cdot e^{\text{Arcsin}\, x} dx$$

Posons : $t = \text{Arcsin}\, x \Leftrightarrow x = \sin t$

D'où :

$$\frac{dx}{dt} = \cos t \Leftrightarrow dx = \cos t\, dt$$

On obtient alors :

$$F(t) = \int \sin t \cdot e^t \cdot \cos t\, dt = \int \frac{1}{2}\sin 2t \cdot e^t dt$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} u(t) = \frac{1}{2}\sin 2t & v'(t) = e^t \\ u'(t) = \cos 2t & v(t) = e^t \end{array}}$$

$$\underbrace{=}_{\text{ipp}} \frac{1}{2}\sin 2t \cdot e^t - \int \cos 2t \cdot e^t dt$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} u(t) = \cos 2t & v'(t) = e^t \\ u'(t) = -2\sin 2t & v(t) = e^t \end{array}}$$

$$\underbrace{=}_{\text{ipp}} \frac{1}{2}\sin 2t \cdot e^t - \cos 2t \cdot e^t - 2\int \sin 2t \cdot e^t dt$$

$$= \frac{1}{2}\sin 2t \cdot e^t - \cos 2t \cdot e^t - 4\underbrace{\int \frac{1}{2}\sin 2t \cdot e^t dt}_{=F(t)}$$

Donc:

$$5F(t) = \frac{1}{2}\sin 2t \cdot e^t - \cos 2t \cdot e^t \quad |:5$$

$$\Leftrightarrow F(t) = \left(\frac{1}{10}\sin 2t - \frac{1}{5}\cos 2t\right)e^t$$

Changement des bornes:

$$x = -1 \Leftrightarrow t = \text{Arcsin}(-1) = -\frac{\pi}{2}$$

$$x = 0 \Leftrightarrow t = \text{Arcsin}\, 0 = 0$$

$$x = 1 \Leftrightarrow t = \text{Arcsin}\, 1 = \frac{\pi}{2}$$

On obtient alors pour l'aire cherchée : **(0,5 pt)**

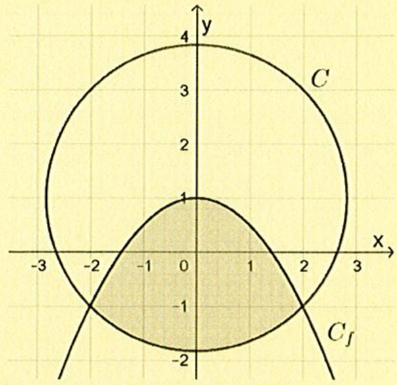
$$A = -[F(t)]_{-\frac{\pi}{2}}^{0} + [F(t)]_{0}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{5} + \frac{1}{5}e^{-\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{5}e^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{5}$$

$$= \frac{1}{5}\left(2 + e^{-\frac{\pi}{2}} + e^{\frac{\pi}{2}}\right) \text{ unités d'aire}$$

$$\approx 1{,}40 \text{ unités d'aire}$$

b)



Points d'intersection de C_f et C :

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x^2 + 1 & (1) \\ x^2 + (y-1)^2 = 8 & (2) \end{cases}$$

(1) donne :

$$\frac{1}{2}x^2 = -y + 1 \Leftrightarrow x^2 = -2y + 2 \quad (*)$$

(*) dans (2) :

$$-2y + 2 + y^2 - 2y + 1 = 8$$

$$\Leftrightarrow y^2 - 4y - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow (y+1)(y-5) = 0$$

$$\Leftrightarrow y = -1 \quad \text{ou} \quad \underbrace{y = 5}_{\text{à écarter car } y = -\frac{1}{2}x^2 + 1 \leq 1}$$

$y = -1$ dans (*) :

$x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$

Points d'intersection : **(1 pt)**

$I_1(-2\,;-1)$ et $I_2(2\,;-1)$

On a :

$$x^2 + (y-1)^2 = 8 \Leftrightarrow (y-1)^2 = 8 - x^2$$

$$\Leftrightarrow \quad y - 1 = \pm\sqrt{8 - x^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad y = 1 \pm \sqrt{8 - x^2}$$

Posons : $g(x) = 1 - \sqrt{8 - x^2}$ **(0,5 pt)**

Aire cherchée : **(1,5 pt)**

$$\int_{-2}^{2} (f(x) - g(x))dx$$

$$= \int_{-2}^{2} \underbrace{\left(-\frac{1}{2}x^2 + 1 - 1 + \sqrt{8 - x^2}\right)}_{\text{fonction paire}} dx$$

$$= 2\int_{0}^{2} \left(-\frac{1}{2}x^2 + \sqrt{8 - x^2}\right) dx$$

$$= 2\left[-\frac{x^3}{6}\right]_0^2 + 2\underbrace{\int_0^2 \sqrt{8-x^2}\,dx}_{=I}$$

$$= 2\left(-\frac{8}{6}\right) + 2(\pi+2)$$

$$= -\frac{8}{3} + 2\pi + 4$$

$$= 2\pi + \frac{4}{3} \text{ unités d'aire}$$

$$\approx 7{,}62 \text{ unités d'aire}$$

Calcul à part pour I : **(4 pts)**

Posons :

$$x = 2\sqrt{2}\cos t \Leftrightarrow t = \operatorname{Arccos}\frac{x}{2\sqrt{2}}$$

On a alors :

$$x = 0 \Leftrightarrow t = \operatorname{Arccos} 0 = \frac{\pi}{2}$$

$$x = 2 \Leftrightarrow t = \operatorname{Arccos}\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{dx}{dt} = -2\sqrt{2}\sin t \Leftrightarrow dx = -2\sqrt{2}\sin t\,dt$$

D'où :

$$I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{8 - 8\cos^2 t}\,\left(-2\sqrt{2}\sin t\right)dt$$

$$= 2\sqrt{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 2\sqrt{2}\ \underbrace{\sqrt{1-\cos^2 t}}_{\substack{=\sqrt{\sin^2 t} \\ =|\sin t| \\ =\sin t \text{ car } t\in[0\,;\pi]}}\ \sin t\,dt$$

$$= 8\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\,dt$$

$$= 4\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 2t)dt$$

$$= 4\left[t - \frac{1}{2}\sin 2t\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 4\left(\frac{\pi}{2} - 0 - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right)$$

$$= \pi + 2$$

(5+7) 12 points

Question 7

$$f_m(x) = x + \ln|x^2 - m| \qquad (m \in]-\infty\,;0])$$

a) Condition d'existence :

$|x^2 - m| > 0 \Leftrightarrow \quad x^2 - m \neq 0 \Leftrightarrow x^2 \neq m$

<u>1er cas : $m < 0$</u>

$\underbrace{x^2}_{\geq 0} \neq \underbrace{m}_{<0}$; toujours vrai

dom $f_m = \mathbb{R}$ **(0,5 pt)**

<u>2e cas : $m = 0$</u>

$x^2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$

dom $f_0 = \mathbb{R}_0$ **(0,5 pt)**

b) $\boxed{\text{Pour } m \in]-\infty\,;0]:}$

$$\lim_{x\to-\infty} f_m(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\underbrace{x}_{\to-\infty} + \underbrace{\ln|x^2-m|}_{\to+\infty}\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty} x\underbrace{\left(1 + \underbrace{\frac{\ln|x^2-m|}{x}}_{\to 0}\right)}_{\to 1}$$

$$= -\infty$$

<u>Calcul à part :</u> **(2,5 pts)**

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln|x^2-m|}{x}\ \left(\text{F.I.:}\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{x^2-m}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{2}{x}$$

$$= 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f_m(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\underbrace{x}_{\to+\infty} + \underbrace{\ln|x^2-m|}_{\to+\infty}\right) = +\infty$$

(0,5 pt)

$\boxed{\text{Pour } m = 0 :}$ **(0,5 pt)**

$$\lim_{x\to 0} f_0(x) = \lim_{x\to 0}\left(\underbrace{x}_{\to 0} + \underbrace{\ln x^2}_{\to-\infty}\right) = -\infty$$

c) dom f'_m = dom f_m **(1,5 pt)**

$$f'_m(x) = \left(x + \ln|x^2-m|\right)'$$

$$= 1 + \frac{2x}{x^2-m}$$

$$= \frac{x^2+2x-m}{x^2-m}$$

$x^2 + 2x - m\ \left(\Delta = 4 + 4m = 4(m+1)\right)$

On doit distinguer 4 cas pour le tableau de variation :

<u>1er cas : $m < -1$</u> **(1 pt)**

$$\Delta = 4(m+1) < 0\ ;\ f'_m(x) = \frac{\overbrace{x^2+2x-m}^{>0}}{\underbrace{x^2-m}_{>0}} > 0$$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'_m(x)$		$+$	
$f_m(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

<u>2e cas : $m = -1$</u> **(1,5 pt)**

$\Delta = 4(m+1) = 0$

$$f'_{-1}(x) = \frac{x^2+2x+1}{x^2+1} = \frac{(x+1)^2}{x^2+1} \geq 0$$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'_{-1}(x)$		$+$	0	$+$	
$f_{-1}(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-1+\ln 2$ TH	$\nearrow$	$+\infty$

$f_{-1}(-1) = -1 + \ln 2$

$C_{f_{-1}}$ admet une tangente horizontale au point de coordonnées $(-1\,; -1+\ln 2)$.

<u>3e cas : $-1 < m < 0$</u> **(2 pts)**

$\Delta = 4(m+1) > 0$

$$x_{1,m} = \frac{-2-2\sqrt{m+1}}{2} = -1-\sqrt{m+1}$$

$$x_{2,m} = \frac{-2+2\sqrt{m+1}}{2} = -1+\sqrt{m+1}$$

$$f'_m(x) = \frac{x^2+2x-m}{\underbrace{x^2-m}_{>0}}$$

x	$-\infty$		$-1-\sqrt{m+1}$		$-1+\sqrt{m+1}$		$+\infty$
$f'_m(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f_m(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$	$+\infty$

<u>4e cas : $m = 0$</u> **(1,5 pt)**

$\Delta = 4(m+1) = 4 > 0$

$x_{1,0} = -2 \quad ; \quad x_{2,0} = 0 \notin \operatorname{dom} f_0$

$$f'_0(x) = \frac{x^2+2x}{\underbrace{x^2}_{>0}}$$

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'_0(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	
$f_0(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	max	$\searrow$ $-\infty$	$\Vert$	$-\infty$ $\nearrow$	$+\infty$

(1+3,5+7,5) 12 points