LE GOUVERNEMENT
DU GRAND-DUCHÉ DE LUXEMBOURG
Ministère de l'Éducation nationale,
de l'Enfance et de la Jeunesse

EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES CLASSIQUES
2020
CORRIGÉ – BARÈME

BRANCHE	SECTION(S)	ÉPREUVE ÉCRITE	
Mathématiques I	C	*Durée de l'épreuve :*	*2h05*
		Date de l'épreuve :	*21/09/2020*

Partie 1 – obligatoire

1) Question 1 (12 points)

Posons $P(z) = 2z^3 + (-1-11i)z^2 + (19-13i)z + 36 - 228i$

Soit $z_0 = bi$ ($b \in \mathbb{R}$) une racine imaginaire pure de P.

$$\begin{aligned} P(z_0) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad P(bi) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 2(bi)^3 + (-1-11i)\cdot(bi)^2 + (19-13i)\cdot bi + 36 - 228i = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad -2b^3 i + b^2 + 11b^2 i + 19bi + 13b + 36 - 228i = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -2b^3 + 11b^2 + 19b - 228 = 0 \ (1) \\ b^2 + 13b + 36 = 0 \ (2) \end{cases} \end{aligned}$$

Résolvons (2) :

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac \\ &= 13^2 - 4\cdot 1\cdot 36 \\ &= 25 \end{aligned}$$

$$b_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-13-\sqrt{25}}{2\cdot 1} = -9 \qquad b_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-13+\sqrt{25}}{2\cdot 1} = -4$$

$b = -9$ dans (1) : $-2\cdot(-9)^3 + 11\cdot(-9)^2 + 19\cdot(-9) - 228 = 1950 \neq 0$

$b = -4$ dans (1) : $-2\cdot(-4)^3 + 11\cdot(-4)^2 + 19\cdot(-4) - 228 = 0$

Donc $z_0 = -4i$ est une racine imaginaire pure de P.

Par conséquent, $P(z)$est divisible par $z + 4i$ et il existe donc un polynôme Q tel que $P(z) = (z+4i)\cdot Q(z)$.

Recherchons $Q(z)$:

	2	$-1-11i$	$19-13i$	$36-228i$
$-4i$		$-8i$	$-76+4i$	$-36+228i$
	2	$-1-19i$	$-57-9i$	0

Donc $P(z) = (z+4i)\cdot Q(z)$ avec $Q(z) = 2z^2 + (-1-19i)z - 57 - 9i$.

Or $P(z) = 0 \Leftrightarrow (z+4i)\cdot Q(z) = 0 \Leftrightarrow z = -4i$ ou $Q(z) = 0$

Résolvons $Q(z) = 0$:

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac \\ &= (-1-19i)^2 - 4\cdot 2\cdot(-57-9i) \\ &= 1 + 38i - 361 + 456 + 72i \\ &= 96 + 110i \end{aligned}$$

Recherchons les racines carrées complexes de Δ :

$u = x + yi, (x; y) \in \mathbb{R}^2$ est une r.c.c. de Δ

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow u^2 = \Delta \\ &\Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xyi = 96 + 110i \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 96 \\ 2xy = 110 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &|u^2| = |\Delta| \\ \Leftrightarrow\ &|u|^2 = |\Delta| \\ \Leftrightarrow\ &x^2 + y^2 = \sqrt{96^2 + 110^2} \\ \Leftrightarrow\ &x^2 + y^2 = 146 \end{aligned}$$

D'où le nouveau système :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 96 & (1) \\ xy = 55 > 0 & (2) \\ x^2 + y^2 = 146 & (3) \end{cases}$$

$(3) + (1)$:

$$\begin{aligned} &2x^2 = 242 \\ \Leftrightarrow\ &x^2 = 121 \\ \Leftrightarrow\ &x = -11 \text{ ou } x = 11 \end{aligned}$$

$(3) - (1)$:

$$\begin{aligned} &2y^2 = 50 \\ \Leftrightarrow\ &y^2 = 25 \\ \Leftrightarrow\ &y = -5 \text{ ou } y = 5 \end{aligned}$$

D'après (2), x et y ont le même signe, d'où les r.c.c. de Δ sont :

$u_1 = -11 - 5i$ et $u_2 = 11 + 5i = \delta$

Les solutions de l'équation $Q(z) = 0$ sont :

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{-b - \delta}{2a} \\ &= \frac{-(-1 - 19i) - (11 + 5i)}{2 \cdot 2} \\ &= \frac{-10 + 14i}{4} \\ &= -\frac{5}{2} + \frac{7}{2}i \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} z_2 &= \frac{-b + \delta}{2a} \\ &= \frac{-(-1 - 19i) + (11 + 5i)}{2 \cdot 2} \\ &= \frac{12 + 24i}{4} \\ &= 3 + 6i \end{aligned}$$

Finalement : $\mathcal{S}_{\mathbb{C}} = \left\{-4i; -\frac{5}{2} + \frac{7}{2}i; 3 + 6i\right\}$

2) Question 2 (3 + 1 + 2 + 4 = 10 points)

a) $z_1 = \frac{5-i\sqrt{3}}{2+i\sqrt{3}} \cdot \frac{2-i\sqrt{3}}{2-i\sqrt{3}}$

$$= \frac{10 - 5\sqrt{3}i - 2\sqrt{3}i - 3}{4+3}$$

$$= \frac{7 - 7\sqrt{3}i}{7}$$

$$= 1 - i\sqrt{3}$$

(forme alg.)

$$|z_1| = \sqrt{1^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = 2$$

$$\left.\begin{aligned} \cos(\Theta_1) &= \frac{1}{2} \\ \sin(\Theta_1) &= \frac{-\sqrt{3}}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \Theta_1 = -\frac{\pi}{3} \pmod{2\pi}$$

D'où : $z_1 = 2\text{cis}\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ (forme trig.)

b) $|z_2| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$$\left.\begin{aligned} \cos(\Theta_2) &= \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(\Theta_2) &= \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \Theta_2 = \frac{\pi}{4} \pmod{2\pi}$$

D'où : $z_2 = \sqrt{2}\text{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)$ (forme trig.)

c) $Z = \frac{\left(2\text{cis}\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)^3}{\left(\sqrt{2}\text{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^5}$

$$= \frac{8\text{cis}(-\pi)}{4\sqrt{2}\text{cis}\left(\frac{5\pi}{4}\right)}$$

$$= \sqrt{2}\text{cis}\left(-\pi - \frac{5\pi}{4}\right)$$

$$= \sqrt{2}\text{cis}\left(-\frac{9\pi}{4}\right)$$

$$= \sqrt{2}\text{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

(forme trig.)

$$Z = \sqrt{2}\text{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \sqrt{2} \cdot \left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$= \sqrt{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$= 1 - i$$

(forme alg.)

d) $u = \rho\text{cis}(\Phi)$ ($\rho \in \mathbb{R}_+^*$; $\Phi \in \mathbb{R}$) est une racine cubique complexe de $Z = \sqrt{2}\text{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

$$\Leftrightarrow u^3 = Z$$

$$\Leftrightarrow \left(\rho\text{cis}(\Phi)\right)^3 = \sqrt{2}\text{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow \rho^3\text{cis}(3\Phi) = \sqrt{2}\text{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

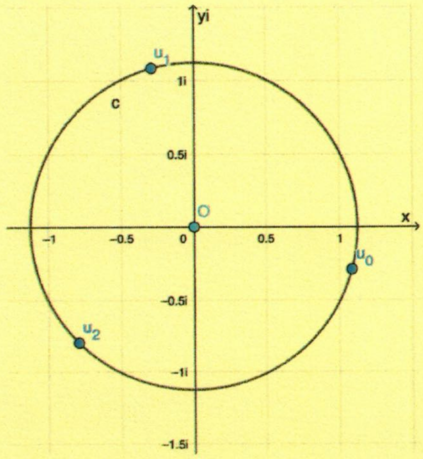
$$\Leftrightarrow \rho^3 = \sqrt{2} \text{ et } 3\Phi = -\frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi, \quad k \in \{0; 1; 2\}$$

$$\Leftrightarrow \rho = \sqrt[6]{2} \text{ et } \Phi = -\frac{\pi}{12} + k \cdot \frac{2\pi}{3}, \quad k \in \{0; 1; 2\}$$

Les racines cubiques complexes de Z sont donc les nombres :

$u_0 = \sqrt[6]{2}\text{cis}\left(-\frac{\pi}{12}\right)$ $\qquad$ $u_1 = \sqrt[6]{2}\text{cis}\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ $\qquad$ $u_2 = \sqrt[6]{2}\text{cis}\left(\frac{5\pi}{4}\right)$

Dans le plan de Gauss :



3) Question 3 (3 + 5 = 8 points)

a) Posons $z = x + yi, (x; y) \in \mathbb{R}^2$ alors $\bar{z} = x - yi$ et

$$\begin{aligned} z = 2\bar{z} - 2 + 6i &\Leftrightarrow x + yi = 2 \cdot (x - yi) - 2 + 6i \\ &\Leftrightarrow x + yi = 2x - 2yi - 2 + 6i \\ &\Leftrightarrow -x + 3yi = -2 + 6i \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -x = -2 \\ 3y = 6 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Finalement : $\mathcal{S}_{\mathbb{C}} = \{2 + 2i\}$

b)

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{\cos(\theta) + i\sin(\theta)}{\cos(\theta) - i\sin(\theta)} \cdot \frac{\cos(\theta) + i\sin(\theta)}{\cos(\theta) + i\sin(\theta)} \\ &= \frac{\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) + i \cdot 2\cos(\theta)\sin(\theta)}{\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)} \\ &= \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) + i \cdot 2\cos(\theta)\sin(\theta) \end{aligned}$$

ou bien:

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{\cos(\theta) + i\sin(\theta)}{\cos(\theta) - i\sin(\theta)} \\ &= \frac{\text{cis}(\theta)}{\text{cis}(-\theta)} \\ &= \text{cis}(2\theta) \\ &= \cos(2\theta) + i\sin(2\theta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_2 &= (3 + i)^4 \\ &= ((3 + i)^2)^2 \\ &= (9 + 6i - 1)^2 \\ &= (8 + 6i)^2 \\ &= 64 + 96i - 36 \\ &= 28 + 96i \end{aligned}$$

ou bien :

$$\begin{aligned} z_2 &= (3 + i)^4 \\ &= 3^4 + 4 \cdot 3^3 i + 6 \cdot 3^2 i^2 + 4 \cdot 3 i^3 + i^4 \\ &= 81 + 108i - 54 - 12i + 1 \\ &= 28 + 96i \end{aligned}$$

Partie 2 - deux exercices au choix, à cocher sur la page de garde

Question 4 **(6 + 5 + 4 = 15 points)**

1)
$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{-1-4i}{5+3i}\cdot\frac{5-3i}{5-3i} \\ &= \frac{-5+3i-20i-12}{25+9} \\ &= \frac{-17-17i}{34} \\ &= -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i \end{aligned}$$

(forme alg.)

$$|z_1| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\left.\begin{aligned} \cos(\theta_1) &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(\theta_1) &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \theta_1 = \frac{5\pi}{4}\ (\text{mod } 2\pi)$$

D'où : $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{4}\right)$ (forme trig.)

$$\begin{aligned} z_2 &= -2\sqrt{2}\mathrm{i}\operatorname{cis}\left(-\frac{7\pi}{6}\right) \\ &= 2\sqrt{2}\operatorname{cis}\left(\frac{3\pi}{2}\right)\cdot\operatorname{cis}\left(-\frac{7\pi}{6}\right) \\ &= 2\sqrt{2}\operatorname{cis}\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{7\pi}{6}\right) \\ &= 2\sqrt{2}\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

(forme trig.)

$$\begin{aligned} z_2 &= 2\sqrt{2}\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ &= 2\sqrt{2}\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) \\ &= 2\sqrt{2}\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \\ &= \sqrt{2}+\sqrt{6}i \end{aligned}$$

(forme alg.)

2)
$$\begin{aligned} Z &= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{4}\right)}{2\sqrt{2}\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right)} \\ &= \frac{1}{4}\operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right) \\ &= \frac{1}{4}\operatorname{cis}\left(\frac{11\pi}{12}\right) \end{aligned}$$

(forme trig.)

$$\begin{aligned} Z &= \frac{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i}{\sqrt{2}+\sqrt{6}i}\cdot\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}i}{\sqrt{2}-\sqrt{6}i} \\ &= \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}i-\frac{\sqrt{2}}{2}i-\frac{\sqrt{6}}{2}}{2+6} \\ &= \frac{\frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}i}{8} \\ &= \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{16}+\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{16}i \end{aligned}$$

(forme alg.)

3) En comparant la forme trigonométrique et la forme algébrique de Z on trouve :

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \frac{1}{4}\operatorname{cis}\left(\frac{11\pi}{12}\right) = \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{16}+\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{16}i \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{4}\left(\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)\right) = \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{16}+\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{16}i \\ &\Leftrightarrow \cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right) = \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}+\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}i \\ &\Leftrightarrow \cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) = \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} \text{ et } \sin\left(\frac{11\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

Finalement : $\tan\left(\frac{11\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{4}{-\sqrt{2}-\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{-\sqrt{2}-\sqrt{6}} = -2+\sqrt{3}$

Question 5 **(15 points)**

$$\begin{aligned}
\delta &= \begin{vmatrix} m & 1 & 2 \\ 1 & 2m & 3 \\ 1 & -1 & m-1 \end{vmatrix} \\
&= m \cdot \begin{vmatrix} 2m & 3 \\ -1 & m-1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & m-1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2m & 3 \end{vmatrix} \\
&= m \cdot (2m^2 - 2m + 3) - 1 \cdot (m - 1 + 2) + 1 \cdot (3 - 4m) \\
&= 2m^3 - 2m^2 + 3m - m - 1 + 3 - 4m \\
&= 2m^3 - 2m^2 - 2m + 2 \\
&= 2m^2(m-1) - 2(m-1) \\
&= 2(m-1)(m^2-1) \\
&= 2(m-1)^2(m+1)
\end{aligned}$$

$$\delta = 0 \Leftrightarrow m = -1 \text{ ou } m = 1$$

$\boxed{m \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}}$

$\delta \neq 0$ et donc le système admet une solution unique.

$$\begin{aligned}
N_x &= \begin{vmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 3 & 2m & 3 \\ 2 & -1 & m-1 \end{vmatrix} \\
&= -2 \cdot \begin{vmatrix} 2m & 3 \\ -1 & m-1 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & m-1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2m & 3 \end{vmatrix} \\
&= -2 \cdot (2m^2 - 2m + 3) - 3 \cdot (m - 1 + 2) + 2 \cdot (3 - 4m) \\
&= -4m^2 + 4m - 6 - 3m - 3 + 6 - 8m \\
&= -4m^2 - 7m - 3 \\
&= (m+1) \cdot (-4m-3)
\end{aligned}$$

$$x = \frac{N_x}{\delta} = \frac{(m+1) \cdot (-4m-3)}{2(m-1)^2(m+1)} = \frac{-4m-3}{2(m-1)^2}$$

$$\begin{aligned}
N_y &= \begin{vmatrix} m & -2 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & m-1 \end{vmatrix} \\
&= m \cdot \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & m-1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & m-1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} \\
&= m \cdot (3m - 3 - 6) - 1 \cdot (-2m + 2 - 4) + 1 \cdot (-6 - 6) \\
&= 3m^2 - 9m + 2m + 2 - 12 \\
&= 3m^2 - 7m - 10 \\
&= (m+1) \cdot (3m-10)
\end{aligned}$$

$$y = \frac{N_y}{\delta} = \frac{(m+1) \cdot (3m-10)}{2(m-1)^2(m+1)} = \frac{3m-10}{2(m-1)^2}$$

$$\begin{aligned}
N_z &= \begin{vmatrix} m & 1 & -2 \\ 1 & 2m & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \\
&= m \cdot \begin{vmatrix} 2m & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2m & 3 \end{vmatrix} \\
&= m \cdot (4m + 3) - 1 \cdot (2 - 2) + 1 \cdot (3 + 4m) \\
&= 4m^2 + 3m + 3 + 4m \\
&= 4m^2 + 7m + 3 \\
&= (m+1) \cdot (4m+3)
\end{aligned}$$

$$z = \frac{N_z}{\delta} = \frac{(m+1) \cdot (4m+3)}{2(m-1)^2(m+1)} = \frac{4m+3}{2(m-1)^2}$$

Finalement : $\mathcal{S} = \left\{ \left(\frac{-4m-3}{2(m-1)^2} ; \frac{3m-10}{2(m-1)^2} ; \frac{4m+3}{2(m-1)^2} \right) \right\}$

$\boxed{m=-1}$

Alors (s) s'écrit : $\begin{cases} -x+y+2z &= -2 \\ x-2y+3z &= 3 \\ x-y-2z &= 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y-2z &= 2\ (1) \\ x-2y+3z &= 3\ \ (2) \end{cases}$

De (1) : $x = y + 2z + 2$ (3)

(3) dans (2) : $y + 2z + 2 - 2y + 3z = 3 \Leftrightarrow -y + 5z = 1 \Leftrightarrow y = -1 + 5z$ (4)

(4) dans (3) : $x = -1 + 5z + 2z + 2 \Leftrightarrow x = 1 + 7z$

Posons $z = \lambda$, alors $(s) \Leftrightarrow \begin{cases} x = & 1 & +7\lambda \\ y = & -1 & +5\lambda \\ z = & & \lambda \end{cases}$

Le système (s) est simplement indéterminé et $\mathcal{S} = \{(1+7\lambda; -1+5\lambda; \lambda) | \lambda \in \mathbb{R}\}$

$\boxed{m=1}$

Alors (s) s'écrit : $\begin{cases} x+y+2z &= -2 \\ x+2y+3z &= 3 \\ x-y &= 2 \end{cases} \xLeftrightarrow{(2)\to 2\cdot(2)-3\cdot(1)} \begin{cases} x+y+2z &= -2 \\ -x+y &= 12 \\ x-y &= 2 \end{cases}$

Le système (s) est impossible et $\mathcal{S} = \emptyset$

Question 6 **(3 + 1 + 3 + 3 + 5 = 15 points)**

1) Coordonnées de $\overrightarrow{AB}$: $\begin{pmatrix} 1-2 \\ -2-1 \\ 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Un système d'équations paramétriques de la droite d :

$M(x;y;z) \in d \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires

$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AM} = k \cdot \overrightarrow{AB}$

$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{cases} x-2 = -k \\ y-1 = -3k \\ z-2 = k \end{cases}$

$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{cases} x = 2-k \\ y = 1-3k \\ z = 2+k \end{cases}$

Un système d'équations cartésiennes de la droite d :

$M(x;y;z) \in d \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{cases} x = 2-k \\ y = 1-3k \\ z = 2+k \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \exists k \in \mathbb{R} \text{ tel que } k = z-2 \\ x = 2-k \\ y = 1-3k \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \exists k \in \mathbb{R} \text{ tel que } k = z-2 \\ x = 2-(z-2) \\ y = 1-3\cdot(z-2) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+z-4 = 0 \\ y+3z-7 = 0 \end{cases}$

2) $x_C + z_C - 4 = -1 + 4 - 4 = -1 \neq 0$ donc $C(-1;3;4) \notin d$.

3) $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de d et donc un vecteur normal à π car $d \perp \pi$.

Une équation cartésienne de π :

$$\begin{aligned} M(x;y;z) \in \pi \quad &\Leftrightarrow \overrightarrow{CM} \text{ et } \overrightarrow{AB} \text{ sont orthogonaux} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\ &\Leftrightarrow (x+1)\cdot(-1) + (y-3)\cdot(-3) + (z-4)\cdot 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow -x - 1 - 3y + 9 + z - 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow -x - 3y + z + 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow x + 3y - z - 4 = 0 \end{aligned}$$

4) Coordonnées du point d'intersection de la droite d et du plan π :

$$I(x;y;z) \in \pi \cap d \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y - z - 4 = 0 & (1) \\ x = 2 - k & (2) \\ y = 1 - 3k & (3) \\ z = 2 + k & (4) \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R})$$

(2), (3) et (4) dans (1) :

$$(2-k) + 3\cdot(1-3k) - (2+k) - 4 = 0 \Leftrightarrow -1 - 11k = 0 \Leftrightarrow k = -\frac{1}{11} \ (5)$$

(5) dans (2) : $x = 2 - \left(-\frac{1}{11}\right) \Leftrightarrow x = \frac{23}{11}$

(5) dans (3) : $y = 1 - 3\cdot\left(-\frac{1}{11}\right) \Leftrightarrow y = \frac{14}{11}$

(5) dans (4) : $z = 2 + \left(-\frac{1}{11}\right) \Leftrightarrow z = \frac{21}{11}$

Conclusion : π et d se coupent au point $I\left(\frac{23}{11};\frac{14}{11};\frac{21}{11}\right)$.

5) Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont des vecteurs directeurs de π'.

Coordonnées de $\overrightarrow{AC}$: $\begin{pmatrix} -1-2 \\ 3-1 \\ 4-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} M(x;y;z) \in \pi' \quad &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AC} \text{ sont coplanaires} \\ &\Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-2 & -1 & -3 \\ y-1 & -3 & 2 \\ z-2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-2)\cdot\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - (y-1)\cdot\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (z-2)\cdot\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-2)\cdot(-8) - (y-1)\cdot 1 + (z-2)\cdot(-11) = 0 \\ &\Leftrightarrow -8x + 16 - y + 1 - 11z + 22 = 0 \\ &\Leftrightarrow -8x - y - 11z + 39 = 0 \\ &\Leftrightarrow 8x + y + 11z - 39 = 0 \text{ (une équation cartésienne de } \pi'\text{)} \\ &\Leftrightarrow y = 39 - 8x - 11z \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ y = 39 - 8\lambda - 11\mu \\ z = \mu \end{cases} \text{ (un système d'équations paramétriques de } \pi'\text{)} \end{aligned}$$

Question 7 **(8 + 7 = 15 points)**

1) Tous les événements élémentaires sont équiprobables

$$\text{card } \Omega = B_6^3 = 6^3 = 216$$

a) A: « obtenir 3 nombres égaux »

$$\text{card } A = 6 \cdot 1 \cdot 1 = 6$$

$$p(A) = \frac{\text{card } A}{\text{card } \Omega} = \frac{6}{216} = \frac{1}{36} \approx 0{,}028$$

b) B: « obtenir 5 au premier lancer »

$$\text{card } B = 1 \cdot 6 \cdot 6 = 36$$

$$p(B) = \frac{\text{card } B}{\text{card } \Omega} = \frac{36}{216} = \frac{1}{6} \approx 0{,}167$$

c) C: « obtenir au moins une fois 5 »

$\bar{C}$: « n'obtenir aucun 5 »

$$\text{card } \bar{C} = B_5^3 = 5^3 = 125$$

$$p(C) = 1 - p(\bar{C}) = 1 - \frac{\text{card } \bar{C}}{\text{card } \Omega} = 1 - \frac{125}{216} = \frac{91}{216} \approx 0{,}421$$

d) D: « obtenir une somme supérieure ou égale à 16 »

$$\begin{aligned} 16 &= 6+6+4 \\ &= 6+4+6 \\ &= 4+6+6 \\ &= 5+5+6 \\ &= 5+6+5 \\ &= 6+5+5 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 17 &= 6+6+5 \\ &= 6+5+6 \\ &= 5+6+6 \end{aligned} \qquad 18 = 6+6+6$$

$$\text{card } D = 6 + 3 + 1 = 10$$

$$p(D) = \frac{\text{card } D}{\text{card } \Omega} = \frac{10}{216} = \frac{5}{108} \approx 0{,}046$$

2) Tous les événements élémentaires sont équiprobables

$$\text{card } \Omega = A_{32}^2 = 32 \cdot 31 = 992$$

a) A: « obtenir 2 piques »

$$\text{card } A = A_8^2 = 8 \cdot 7 = 56$$

$$p(A) = \frac{\text{card } A}{\text{card } \Omega} = \frac{56}{992} = \frac{7}{124} \approx 0{,}056$$

b) B: « obtenir exactement 1 pique »

$$\text{card } B = 2 \cdot 8 \cdot 24 = 384$$

$$p(B) = \frac{\text{card } B}{\text{card } \Omega} = \frac{384}{992} = \frac{12}{31} \approx 0{,}387$$

c) C: « n'obtenir aucun pique »

$$\text{card } C = A_{24}^2 = 24 \cdot 23 = 552$$
$$p(C) = \frac{\text{card } C}{\text{card } \Omega} = \frac{552}{992} = \frac{69}{124} \approx 0{,}556$$

d) D: « obtenir exactement un pique et exactement un valet »

$$\text{card } D = 2 \cdot 1 \cdot 21 + 2 \cdot 7 \cdot 3 = 84$$
$$p(D) = \frac{\text{card } D}{\text{card } \Omega} = \frac{84}{992} = \frac{21}{248} \approx 0{,}085$$

Question 8 **(6 + 5 + 4 = 15 points)**

1) Manières possibles :
   a) $A_{10}^3 = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$
   b) $3! \cdot 1 \cdot 1 \cdot 8 + A_8^3 = 48 + 336 = 384$
   c) $3! \cdot 1 \cdot C_9^2 = 6 \cdot 36 = 216$
   d) $1 \cdot A_9^2 + A_9^3 = 72 + 504 = 576$

2) Manières possibles :
   a) $5 \cdot 4 = 20$ $\quad A \xrightarrow{\text{5 poss.}} B \xrightarrow{\text{4 poss}} C$
   b) $20 \cdot 20 = 400$ $\quad A \xrightarrow{\text{5 poss.}} B \xrightarrow{\text{4 poss}} C \xrightarrow{\text{4 poss.}} B \xrightarrow{\text{5 poss}} A$
   c) $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 4 = 240$ $\quad A \xrightarrow{\text{5 poss.}} B \xrightarrow{\text{4 poss}} C \xrightarrow{\text{3 poss.}} B \xrightarrow{\text{4 poss}} A$

3) Manières possibles :
   a) $C_{12}^2 = 66$
   b) $1 \cdot C_{11}^1 = 11$
   c) $C_{12}^3 = 220$
   d) $1 \cdot C_{11}^2 = 55$