LE GOUVERNEMENT
DU GRAND-DUCHÉ DE LUXEMBOURG
Ministère de l'Éducation nationale,
de l'Enfance et de la Jeunesse

EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES CLASSIQUES
2020
CORRIGÉ – BARÈME

BRANCHE	SECTION(S)	ÉPREUVE ÉCRITE
Mathématiques 1	D	*Durée de l'épreuve :* *125min (105+20)* *Date de l'épreuve :* *21/09/2020*

Partie obligatoire

Exercice 1 :

a) Soit $P(z)=z^3+(-4-7i)\cdot z^2+(1+18i)\cdot z-10-55i$
et bi la solution imaginaire pure de $P(z)=0$ avec $b\in\mathbb{R}$

$$P(bi)=0\Leftrightarrow (bi)^3+(-4-7i)\cdot(bi)^2+(1+18i)\cdot bi-10-55i=0$$
$$\Leftrightarrow -b^3i+(-4-7i)\cdot(-b^2)+bi-18b-10-55i=0$$
$$\Leftrightarrow -b^3i+4b^2+7b^2i+bi-18b-10-55i=0$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4b^2-18b-10=0 \\ -b^3i+7b^2i+bi-55i=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b^2-9b-5=0 & (1) \\ -b^3+7b^2+b-55=0 & (2) \end{cases} \quad \boxed{3P}$$

(1) $2b^2-9b-5=0$

$\Delta=81+40=121=11^2$

$b=\dfrac{9-11}{4}=-\dfrac{1}{2}$ ou $b=\dfrac{9+11}{4}=5$

contrôle dans (2) pour $b=5$

$-5^3+7\cdot5^2+5-55$

$=-125+175-50=0$

$5i$ est donc une solution imaginaire pure de $P(z)=0$, et $P(z)$ est divisible par $z-5i$. $\boxed{1{,}5P}$

Schéma de Horner :

	1	$-4-7i$	$1+18i$	$-10-55i$
$5i$		$5i$	$10-20i$	$10+55i$
	1	$-4-2i$	$11-2i$	0

Donc

$$P(z)=(z-5i)\cdot\left(z^2+(-4-2i)\cdot z+11-2i\right) \quad \boxed{3P}$$

$z^2+(-4-2i)\cdot z+11-2i=0$ (3) $\Delta=(-4-2i)^2-4\cdot(11-2i)=16+16i-4-44+8i=-32+24i$ $\boxed{1{,}5P}$

$\delta=a+bi$ est une racine carrée complexe de Δ où $a\in\mathbb{R}$ et $b\in\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2-b^2=-32 & (4) \\ 2ab=+24 & (5) \\ a^2+b^2=40 & (6) \end{cases} \qquad \sqrt{32^2+24^2}=\sqrt{1024+576}=\sqrt{1600}=40$$

(4) + (6) : $2a^2=8\Leftrightarrow a^2=4\Leftrightarrow$ $a=2$ ou $a=-2$

et alors d'après (5) : $2b=12$ / $2b=-12$

$b=6$ / $b=-6$

Donc $\delta=2+6i$ ou $\delta=-2-6i$ $\boxed{3P}$

et les solutions de (3) sont

$$z_1=\frac{4+2i-2-6i}{2}=\frac{2-4i}{2}=1-2i \text{ et } z_2=\frac{4+2i+2+6i}{2}=\frac{6+8i}{2}=3+4i.$$

Ainsi $S=\{1-2i\,;3+4i\,;5i\}$ $\boxed{2P}$

b) Posons $z=a+bi$ où $a\in\mathbb{R}$ et $b\in\mathbb{R}$. Ainsi $\overline{z}=a-bi$

et alors

$$(3+2i)\cdot z=-8+9i+5i\cdot\overline{z}\Leftrightarrow(3+2i)\cdot(a+bi)=-8+9i+5i\cdot(a-bi)\Leftrightarrow 3a+3bi+2ai-2b=-8+9i+5ai+5b$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}3a-2b=-8+5b\\3bi+2ai=9i+5ai\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3a-7b=-8\\-3a+3b=9\quad L_2\to L_1+L_2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3a-7b=-8\\-4b=1\end{cases}$$

de L_2 $b=-\frac{1}{4}$ et dans L_1 $3a+\frac{7}{4}=-8\Leftrightarrow 3a=-\frac{32}{4}-\frac{7}{4}\Leftrightarrow a=-\frac{13}{4}$. Ainsi $S=\left\{-\frac{13}{4}-\frac{1}{4}\cdot i\right\}$ $\boxed{6P}$

Partie au choix

Exercice 2 :

a) $$z_1=\frac{12-11i}{10i}+\frac{7-5i}{3-i}=\frac{(12-11i)\cdot i}{10i\cdot i}+\frac{(7-5i)\cdot(3+i)}{(3-i)\cdot(3+i)}=\frac{12i+11}{-10}+\frac{21+7i-15i+5}{9+1}=\frac{-12i-11+26-8i}{10}$$

$$=\frac{15}{10}-\frac{20i}{10}=\frac{3}{2}-2i.$$

Et alors $(z_1)^2=\left(\frac{3}{2}-2i\right)^2=\frac{9}{4}-6i-4=\frac{-7}{4}-6i$.

Ainsi $(z_1)^2=\frac{-7}{4}-6i$ $\boxed{4P}$

b) Soient

$\frac{i}{2}=r_1\cdot cis\varphi_1$, $r_1=\sqrt{0+\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$ et $\left.\begin{array}{l}\cos\varphi_1=0\\ \sin\varphi_1=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=1\end{array}\right\}\Rightarrow\varphi_1=\frac{\pi}{2}+k\cdot2\pi$ donc $\frac{i}{2}=\frac{1}{2}\cdot\text{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right)$

$\sqrt{2}-\sqrt{2}\cdot i=r_2\cdot cis\varphi_2$, $r_2=\sqrt{2+2}=2$ et $\left.\begin{array}{l}\cos\varphi_2=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\varphi_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow\varphi_2=\frac{-\pi}{4}+k\cdot2\pi$ donc $\sqrt{2}-\sqrt{2}\cdot i=2\cdot\text{cis}\left(\frac{-\pi}{4}\right)$

Alors

$$z_2=\frac{\left(\frac{i}{2}\right)^3\cdot\left[2\cdot cis\left(\frac{-13\pi}{30}\right)\right]^5}{\left(\sqrt{2}-\sqrt{2}\cdot i\right)^4}=\frac{\left[\frac{1}{2}\cdot cis\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]^3\cdot\left[2\cdot cis\left(\frac{-13\pi}{30}\right)\right]^5}{\left[2\cdot\text{cis}\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right]^4}=\frac{\frac{1}{2^3}\cdot cis\left(\frac{3\pi}{2}\right)\cdot2^5\cdot cis\left(\frac{-13\pi}{6}\right)}{2^4\cdot\text{cis}(-\pi)}$$

$$=\frac{2^2\cdot cis\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{13\pi}{6}+\pi\right)}{2^4}=\frac{cis\left(\frac{9\pi}{6}-\frac{13\pi}{6}+\frac{6\pi}{6}\right)}{2^2}=\frac{1}{4}\cdot cis\left(\frac{9\pi}{6}-\frac{13\pi}{6}+\frac{6\pi}{6}\right)=\frac{1}{4}\cdot cis\left(\frac{2\pi}{6}\right)=\underbrace{\frac{1}{4}\cdot cis\left(\frac{\pi}{3}\right)}_{\text{f.trig.}}$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot i\right)=\underbrace{\frac{1}{8}+\frac{\sqrt{3}}{8}\cdot i}_{\text{f.alg.}}$$ $\boxed{6P}$

c)

$$z_3=-18-18\sqrt{3}\cdot i=r_3\cdot cis\varphi_3 \qquad \left.\begin{array}{l}\cos\varphi_3=\dfrac{-18}{36}=\dfrac{-1}{2}\\ \sin\varphi_3=\dfrac{-18\sqrt{3}}{36}=\dfrac{-\sqrt{3}}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow\varphi_3=\frac{-2\pi}{3}+k\cdot 2\pi \text{ donc } z_3=\underbrace{36\cdot\text{cis}\left(\frac{-2\pi}{3}\right)}_{\text{f. trig.}}$$

$$r_3=|z_3|=\sqrt{18^2+18^2\cdot 3}=2\cdot 18=36 \quad \text{et}$$

$u=s\cdot cis\theta$ est une racine quatrième complexe de $36\cdot\text{cis}\left(\dfrac{-2\pi}{3}\right)$

$$\Leftrightarrow s=\sqrt[4]{36}=\left(6^2\right)^{\frac{1}{4}}=6^{\frac{1}{2}}=\sqrt{6} \text{ et } 4\theta=\frac{-2\pi}{3}+k\cdot 2\pi \text{ où } k\in\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow s=\sqrt{6} \text{ et } \theta=\frac{-2\pi}{4\cdot 3}+k\cdot\frac{2\pi}{4}=\frac{-\pi}{6}+k\cdot\frac{3\pi}{6} \text{ où } k\in\mathbb{Z}$$

On obtient quatre racines distinctes :

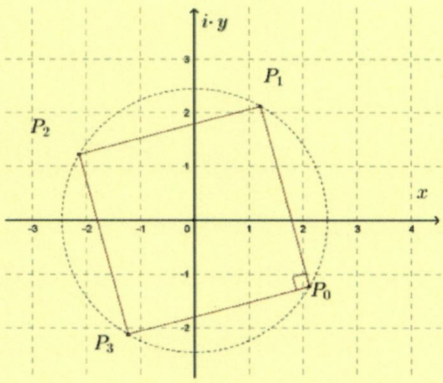
$$u_0=\underbrace{\sqrt{6}\cdot\text{cis}\left(\frac{-\pi}{6}\right)}_{\text{f. trig.}}=\sqrt{6}\cdot\left[\cos\left(\frac{-\pi}{6}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{-\pi}{6}\right)\right]=\sqrt{6}\cdot\left[\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\cdot i\right]=\frac{\sqrt{18}}{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}\cdot i=\underbrace{\frac{3\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}\cdot i}_{\text{f. alg.}}$$

$$u_1=\sqrt{6}\cdot\text{cis}\left(\frac{-\pi}{6}+\frac{3\pi}{6}\right)=\underbrace{\sqrt{6}\cdot\text{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right)}_{\text{f. trig.}}=\sqrt{6}\cdot\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]=\sqrt{6}\cdot\left[\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot i\right]=\underbrace{\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{3\sqrt{2}}{2}\cdot i}_{\text{f. alg.}}$$

$$u_2=\sqrt{6}\cdot\text{cis}\left(\frac{-\pi}{6}+\frac{6\pi}{6}\right)=\underbrace{\sqrt{6}\cdot\text{cis}\left(\frac{5\pi}{6}\right)}_{\text{f. trig.}}=\sqrt{6}\cdot\left[\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right]=\sqrt{6}\cdot\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\cdot i\right]=\underbrace{-\frac{3\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}\cdot i}_{\text{f. alg.}}$$

$$u_3=\sqrt{6}\cdot\text{cis}\left(\frac{-\pi}{6}+\frac{9\pi}{6}\right)=\underbrace{\sqrt{6}\cdot\text{cis}\left(\frac{4\pi}{3}\right)}_{\text{f. trig.}}=\sqrt{6}\cdot\left[\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right]=\sqrt{6}\cdot\left[-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot i\right]=\underbrace{-\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{3\sqrt{2}}{2}\cdot i}_{\text{f. alg.}}$$

5P



3P

$$u_0\cdot u_1\cdot u_2\cdot u_3=\sqrt{6}\cdot\text{cis}\left(\frac{-\pi}{6}\right)\cdot\sqrt{6}\cdot\text{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right)\cdot\sqrt{6}\cdot\text{cis}\left(\frac{5\pi}{6}\right)\cdot\sqrt{6}\cdot\text{cis}\left(\frac{4\pi}{3}\right)=\left(\sqrt{6}\right)^4\cdot\text{cis}\left(\frac{-\pi}{6}+\frac{\pi}{3}+\frac{5\pi}{6}+\frac{4\pi}{3}\right)$$

$$=36\cdot\text{cis}\left(\frac{4\pi}{6}+\frac{5\pi}{3}\right)=36\cdot\text{cis}\left(\frac{7\pi}{3}-2\pi\right)=36\cdot\text{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right)=36\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot i\right)=18+18\sqrt{3}\cdot i=-z_3$$

2P

Exercice 3

a) $z_1 = \frac{-1+i}{i} = \frac{-1+i}{i}\cdot\frac{i}{i} = \frac{-i-1}{-1} = \underbrace{1+i}_{\text{f. alg.}} = r_1 \cdot cis\varphi_1$

où $r_1 = |z_1| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ et $\left.\begin{array}{l} \cos\varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \varphi_1 = \frac{\pi}{4} + k\cdot 2\pi$ donc $z_1 = \underbrace{\sqrt{2}\cdot\text{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)}_{\text{f. trig.}}$

$\boxed{2P}$

b)

$z_2 = \frac{-3}{4} - \frac{3\sqrt{3}}{4}\cdot i = r_2 \cdot cis\varphi_2$

où $r_2 = |z_2| = \sqrt{\frac{9}{16} + \frac{9\cdot 3}{16}} = \sqrt{\frac{9\cdot 4}{16}} = \frac{3}{2}$ et $\left.\begin{array}{l} \cos\varphi_2 = \frac{\frac{-3}{4}}{\frac{3}{2}} = \frac{-1}{2} \\ \sin\varphi_2 = \frac{\frac{-3\sqrt{3}}{4}}{\frac{3}{2}} = \frac{-\sqrt{3}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \varphi_2 = \frac{-2\pi}{3} + k\cdot 2\pi$

donc $z_2 = \underbrace{\frac{3}{2}\cdot\text{cis}\left(\frac{-2\pi}{3}\right)}_{\text{f. trig.}}$

$z_3 = -1 - i = r_3 \cdot cis\varphi_3$

où $r_3 = |z_3| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ et $\left.\begin{array}{l} \cos\varphi_3 = \frac{-1}{\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ \sin\varphi_3 = \frac{-1}{\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \varphi_3 = \frac{-3\pi}{4} + k\cdot 2\pi$ donc $z_3 = \underbrace{\sqrt{2}\cdot\text{cis}\left(\frac{-3\pi}{4}\right)}_{\text{f. trig.}}$

$\boxed{2P}$

c) $Z = \frac{z_1}{(z_2)^2\cdot(z_3)^4} = \frac{1+i}{\left(\frac{-3}{4} - \frac{3\sqrt{3}}{4}\cdot i\right)^2\cdot(-1-i)^4} = \frac{1+i}{\left(\frac{9}{16} + \frac{9\sqrt{3}}{8}\cdot i - \frac{9\cdot 3}{16}\right)\cdot\left[(-1-i)^2\right]^2} = \frac{1+i}{\left(\frac{-9}{8} + \frac{9\sqrt{3}}{8}\cdot i\right)\cdot(1+2i-1)^2}$

$$= \frac{1+i}{\left(\frac{-9}{8} + \frac{9\sqrt{3}}{8}\cdot i\right)\cdot(2i)^2} = \frac{1+i}{\left(\frac{-9}{8} + \frac{9\sqrt{3}}{8}\cdot i\right)\cdot(-4)} = \frac{(1+i)\cdot\left(\frac{9}{2} + \frac{9\sqrt{3}}{2}\cdot i\right)}{\left(\frac{9}{2} - \frac{9\sqrt{3}}{2}\cdot i\right)\cdot\left(\frac{9}{2} + \frac{9\sqrt{3}}{2}\cdot i\right)} = \frac{\frac{9}{2} + \frac{9\sqrt{3}}{2}\cdot i + \frac{9}{2}\cdot i - \frac{9\sqrt{3}}{2}}{\frac{81}{4} + \frac{81\cdot 3}{4}}$$

$$= \frac{\frac{9}{2} - \frac{9\sqrt{3}}{2} + \left(\frac{9}{2} + \frac{9\sqrt{3}}{2}\right)\cdot i}{81} = \underbrace{\frac{1-\sqrt{3}}{18} + \left(\frac{1+\sqrt{3}}{18}\right)\cdot i}_{\text{f. alg}}$$

$\boxed{6P}$

D'autre part

$$Z=\frac{z_1}{(z_2)^2\cdot(z_3)^4}=\frac{\sqrt{2}\cdot\text{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\left[\frac{3}{2}\cdot\text{cis}\left(\frac{-2\pi}{3}\right)\right]^2\cdot\left[\sqrt{2}\cdot\text{cis}\left(\frac{-3\pi}{4}\right)\right]^4}=\frac{\sqrt{2}\cdot\text{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\frac{9}{4}\cdot\text{cis}\left(\frac{-4\pi}{3}\right)\cdot4\cdot\text{cis}(-3\pi)}=\frac{\sqrt{2}\cdot\text{cis}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{4\pi}{3}+3\pi\right)}{9}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{9}\cdot\text{cis}\left(\frac{3\pi+16\pi+36\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2}}{9}\cdot\text{cis}\left(\frac{55\pi}{12}-\underbrace{\frac{48\pi}{12}}_{2\cdot2\pi}\right)=\underbrace{\frac{\sqrt{2}}{9}\cdot\text{cis}\left(\frac{7\pi}{12}\right)}_{\text{f. trig. de Z}}$$

5P

d) D'après c) $\underbrace{\frac{1-\sqrt{3}}{18}+\left(\frac{1+\sqrt{3}}{18}\right)\cdot i}_{\text{f. alg. de Z}}=\underbrace{\frac{\sqrt{2}}{9}\cdot\text{cis}\left(\frac{7\pi}{12}\right)}_{\text{f. trig. de Z}}$. D'où

$$\begin{cases}\frac{1-\sqrt{3}}{18}=\frac{\sqrt{2}}{9}\cdot\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)\\[2mm]\frac{1+\sqrt{3}}{18}=\frac{\sqrt{2}}{9}\cdot\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)=\frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\\[2mm]\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)=\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\end{cases}$$

et $\tan\left(\frac{7\pi}{12}\right)=\frac{\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)}{\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)}=\frac{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}}{\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{\sqrt{2}-\sqrt{6}}\cdot\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{6}}=\frac{2+2\sqrt{12}+6}{2-6}=\frac{8+4\sqrt{3}}{-4}=-2-\sqrt{3}$ 5P

Exercice 4 :

a) Posons $A=\begin{pmatrix}3&1&2\\m+1&2&-1\\3&m-4&7\end{pmatrix}$. Alors $|A|=\begin{vmatrix}3&1&2\\m+1&2&-1\\3&m-4&7\end{vmatrix}$

$=2m^2-6m-8+3m-7m+8=2m^2-10m=2m\cdot(m-5)$. $|A|=2m\cdot(m-5)$ 2,5P

b) Si $m\in\mathbb{R}-\{0;5\}$, le système admet une solution unique. Dans ce cas :

$$|A_x|=\begin{vmatrix}5&1&2\\7&2&-1\\m+3&m-4&7\end{vmatrix}=70-m-3+14m-56-4m-12+5m-20-49=14m-70=14\cdot(m-5)$$

et $x=\frac{|A_x|}{|A|}=\frac{14(m-5)}{2m(m-5)}=\frac{7}{m}$ $x=\frac{7}{m}$ 2P

$$|A_y|=\begin{vmatrix}3&5&2\\m+1&7&-1\\3&m+3&7\end{vmatrix}=147-15+2m^2+8m+6-42+3m+9-35m-35=2m^2-24m+70$$

$=2\cdot(m^2-12m+35)$ Et $m^2-12m+35=0$ $\Delta=144-4\cdot35=4$ $m=\frac{12-2}{2}=5$ ou $m=\frac{12+2}{2}=7$

et $y=\dfrac{|A_y|}{|A|}=\dfrac{2\cdot(m-5)\cdot(m-7)}{2m\cdot(m-5)}=\dfrac{m-7}{m}$ $\qquad y=\dfrac{m-7}{m}$ $\boxed{2P}$

$$|A_z|=\begin{vmatrix}3 & 1 & 5\\ m+1 & 2 & 7\\ 3 & m-4 & m+3\end{vmatrix}=6m+18+21+5m^2-15m-20-30-21m+84-m^2-4m-3=4m^2-34m+70$$

$=2\cdot(2m^2-17m+35)$.

Et $2m^2-17m+35=0$ $\Delta=289-4\cdot2\cdot35=9$ $m=\dfrac{17-3}{4}=\dfrac{7}{2}$ ou $m=\dfrac{17+3}{4}=5$

et $z=\dfrac{|A_z|}{|A|}=\dfrac{4\cdot(m-5)\cdot\left(m-\frac{7}{2}\right)}{2m\cdot(m-5)}=\dfrac{2m-7}{m}$. $\qquad z=\dfrac{2m-7}{m}$ $\boxed{2P}$

On a une solution unique, $S_m=\left\{\left(\dfrac{7}{m};\dfrac{m-7}{m};\dfrac{2m-7}{m}\right)\right\}$.

<u>Interprétation géométrique</u> : Les trois équations représentent trois plans qui <u>se coupent en un point</u> $A_m\left(\dfrac{7}{m};\dfrac{m-7}{m};\dfrac{2m-7}{m}\right)$ $\boxed{0,5P}$

c) Si $m=0$, le système devient :

$$\begin{cases}3x+y+2z=5 & L_1\\ x+2y-z=7 & L_2\\ 3x-4y+7z=3 & L_3\end{cases}\quad \text{Eliminons } x \text{ dans } L_2 \text{ et } L_3 \quad \begin{matrix}\\ L_2\to L_1-3L_2\\ L_3\to L_1-L_3\end{matrix}\quad\Leftrightarrow\begin{cases}3x+y+2z=5\\ -5y+5z=-16\\ 5y-5z=2\end{cases}\quad \text{impossible}$$

ou $x\cdot\underbrace{|A|}_{=0}=\underbrace{|A_x|}_{\neq0}$ ce qui est impossible.

Ainsi $S_0=\varnothing$

<u>Interprétation géométrique</u> : **Les trois équations représentent trois plans qui n'ont <u>aucun point en commun.</u>** $\boxed{3,5P}$

d) Si $m=5$, le système devient :

$$\begin{cases}3x+y+2z=5 & L_1\\ 6x+2y-z=7 & L_2\\ 3x+y+7z=8 & L_3\end{cases}\quad \text{Eliminons } x \text{ dans } L_2 \text{ et } L_3 \quad \begin{matrix}\\ L_2\to L_2-2\cdot L_1\\ L_3\to L_3-L_1\end{matrix}\quad\Leftrightarrow\begin{cases}3x+y+2z=5\\ -5z=-3 & \Rightarrow z=\dfrac{3}{5}\\ 5z=3 & \Rightarrow z=\dfrac{3}{5}\end{cases}$$

$z=\dfrac{3}{5}$ dans L_1 $\quad 3x+y+2\cdot\dfrac{3}{5}=\dfrac{25}{5}\Leftrightarrow 3x+y=\dfrac{19}{5}$.

Le système est simplement indéterminé. Posons $x=\alpha$. Alors $3\alpha+y=\dfrac{19}{5}\Leftrightarrow y=\dfrac{19}{5}-3\alpha$

Ainsi $S_5=\left\{\left(\alpha;\dfrac{19}{5}-3\alpha;\dfrac{3}{5}\right)\text{ où }\alpha\in\mathbb{R}\right\}$ $\boxed{6P}$

Interprétation géométrique :

Comme $\begin{cases} x=0+\alpha \\ y=\dfrac{19}{5}-3\alpha \\ z=\dfrac{3}{5}+0\alpha \end{cases}$. Posons $B\left(0;\dfrac{19}{5};\dfrac{3}{5}\right)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-3\\0\end{pmatrix}$ Les trois équations représentent trois plans

qui se coupent en une droite passant par le point B et de vecteur directeur $\vec{u}$. $\boxed{1{,}5P}$

Autres notations possibles :

$S_5=\left\{\left(\dfrac{19}{15}-\dfrac{1}{3}\alpha\,;\alpha\,;\dfrac{3}{5}\right) \text{ où } \alpha\in\mathbb{R}\right\}$ et $B\left(\frac{19}{15};0;\frac{3}{5}\right)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\1\\0\end{pmatrix}$ ou $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\3\\0\end{pmatrix}$

Exercice 5 :

a)

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-2\\-8\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}$ ne sont évidemment pas colinéaires et A, B et C ne sont donc pas alignés.

$$M(x;y;z)\in\pi_1 \Leftrightarrow dét\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & 1 & -2 \\ y-2 & -2 & -1 \\ z & -8 & 1 \end{vmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow -2x+2+16y-32-z-4z-8x+8-y+2=0 \Leftrightarrow -10x+15y-5z-20=0 \Leftrightarrow 2x-3y+z+4=0$$

Ainsi $\pi_1 \equiv 2x-3y+z+4=0$ $\boxed{4P}$

b)

$d_1\equiv\begin{cases} x=-4+2\cdot\alpha \\ y=-5+3\alpha \\ z=1-\alpha \end{cases}$ admet $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}$ comme vecteur directeur. $d_1 \parallel \pi_1 \Leftrightarrow \vec{u}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ coplanaires.

Et $dét\left(\vec{u};\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & -1 \\ -1 & -8 & 1 \end{vmatrix}=-4+1+48+4-16-3=30\neq 0$ Ainsi $d_1 \not\parallel \pi_1$. $\boxed{2P}$

c)

$$E(x;y;z)\in d_1\cap\pi_1 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-4+2\cdot\alpha & (1) \\ y=-5+3\alpha & (2) \\ z=1-\alpha & (3) \\ 2x-3y+z+4=0 & (4) \end{cases}$$

(1), (2) et (3) dans (4) $2(-4+2\cdot\alpha)-3(-5+3\alpha)+(1-\alpha)+4=0 \Leftrightarrow -8+4\alpha+15-9\alpha+1-\alpha+4=0$

$\Leftrightarrow -6\alpha+12=0 \Leftrightarrow \alpha=2$ et $x=-4+2\cdot 2=0$, $y=-5+3\cdot 2=1$, $z=1-2=-1$ et $E(0;1;-1)$. $\boxed{3P}$

d) $F(x;y;3)\in d_1$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=-4+2\cdot\alpha & (1)\\ y=-5+3\alpha & (2)\\ 3=1-\alpha & (3)\end{cases}$$. De (3) $\alpha=-2$

et $x=-4+2\cdot(-2)=-8$, $y=-5+3\cdot(-2)=-11$ et $F(-8;-11;3)$. $\boxed{2P}$

e)

$$\begin{cases}x=-4+2\cdot\alpha\\ y=-5+3\alpha\\ z=1-\alpha\end{cases}\Leftrightarrow\frac{x+4}{2}=\frac{y+5}{3}=\frac{z-1}{-1}\Leftrightarrow\begin{cases}3x+12=2y+10\\ -y-5=3z-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x-2y+2=0\\ -y-3z-2=0\end{cases}.$$

Ainsi $d_1\equiv\begin{cases}3x-2y+2=0\\ -y-3z-2=0\end{cases}$ $\boxed{3P}$

autre équation valable $x+2z=-2$

f)

$\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal de $\pi_1\equiv 2x-3y+z+4=0$ et donc un vecteur directeur de d_2.

Ainsi $d_2\equiv\begin{cases}x=2+2\alpha\\ y=2-3\alpha\\ z=2+\alpha\end{cases}$ où $\alpha\in\mathbb{R}$ $\boxed{1P}$

g)

$$M(x;y;z)\in d_1\cap d_2\Leftrightarrow\begin{cases}-4+2\cdot\alpha=2+2\beta\\ -5+3\alpha=2-3\beta\\ 1-\alpha=2+\beta\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2\cdot\alpha-2\beta=6\\ 3\alpha+3\beta=7\\ -\alpha-\beta=1 & |\cdot(-3)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2\cdot\alpha-2\beta=6\\ 3\alpha+3\beta=7\\ 3\alpha+3\beta=-3\end{cases}\Big\rangle\text{ impossible}$$

Donc $d_1\cap d_2=\varnothing$ $\boxed{2P}$

h) Comme $\pi_2\parallel\pi_1$, une équation cartésienne de π_2 est de la forme $2x-3y+z+d=0$.

Puisque $G(2;2;2)\in\pi_2$ il faut que $2\cdot2-3\cdot2+2+d=0\Leftrightarrow d=0$.

Ainsi $\pi_2\equiv 2x-3y+z=0$. $\boxed{2P}$

D'autre part $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-2\\-8\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}$ ne sont pas seulement des vecteur directeurs de π_1 mais

également de π_2. Ainsi $\pi_2\equiv\begin{cases}x=2+\alpha-2\beta\\ y=2-2\alpha-\beta\\ z=2-8\alpha+\beta\end{cases}$ où $\alpha\in\mathbb{R},\beta\in\mathbb{R}$ $\boxed{1P}$