LE GOUVERNEMENT DU GRAND-DUCHÉ DE LUXEMBOURG Ministère de l'Éducation nationale, de l'Enfance et de la Jeunesse	EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES CLASSIQUES **2021** **CORRIGÉ – BARÈME**	
BRANCHE	**SECTION(S)**	**ÉPREUVE ÉCRITE**
Mathématiques I	**B**	*Durée de l'épreuve : 180 minutes* *Date de l'épreuve : 21/05/2021*

Question 1 (5 + 5 + (3 + 2 + 3) = 18 points)

1. 1ère méthode : Division classique
   Le polynôme est divisible par $(z-bi)(z+bi)=z^2+b^2$

$$z^4+2z^3+11z^2+18z+18$$
$$=(z^2+b^2)(z^2+2z+11-b^2)+(18-2b^2)z+18-11b^2+b^4$$

Le reste doit être nul, pour tout z :

$$18-11b^2+b^4=0 \wedge 18-2b^2=0$$

3 *respectivement* -3 vérifient la deuxième égalité.
3 *respectivement* -3 vérifient aussi la première égalité.

Donc : $b=3 \vee b=-3$

2e méthode : Schéma de Horner; trouver la solution bi = 3i ou bi = -3i, et vérifier que l'opposé est aussi une solution de l'équation initiale. Faire un deuxième schéma de Horner.

Suite après l'une des deux méthodes:
Donc :

$$z^4+2z^3+11z^2+18z+18$$
$$=(z^2+9)(z^2+2z+11-9)$$
$$=(z^2+9)(z^2+2z+2)$$

Factorisons z^2+2z+2: $\Delta=-4$; $racines$: $-1+i;-1-i$
Donc : $z^4+2z^3+11z^2+18z+18=(z-3i)(z+3i)(z+1+i)(z+1-i)$

2. Posons $z=x+iy$, $avec\ x,y\ deux\ réels$, $(x;y)\neq(-1;0)$.
   Alors :

$$z'=\frac{i(x+iy)+4-3i}{i(x+iy)+i}$$
$$=\frac{(4-y)+i(x-3)}{-y+i(x+1)}\cdot\frac{(-y-i(x+1))}{(-y-i(x+1))}$$
$$=\frac{(4-y)\cdot(-y)+(x-3)\cdot(x+1)+i(-(4-y)\cdot(x+1)-(x-3)\cdot y)}{y^2+(x+1)^2}$$
$$=\frac{-4y+y^2+x^2-2x-3+i(-4x-4+xy+y-xy+3y)}{y^2+(x+1)^2}$$
$$=\frac{x^2-2x+y^2-4y-3}{y^2+(x+1)^2}+i\frac{(-4x+4y-4)}{y^2+(x+1)^2}$$

Donc : $M(x+iy)\in E \Leftrightarrow x^2-2x+1+y^2-4y+4=8 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y-2)^2=8$
E est le cercle de centre I(1+2i), de rayon $2\sqrt{2}$, privé du point A(-1) .

3.

a.
$$z^2=\left(\sqrt{2\sqrt{5}-\sqrt{10}}-i\sqrt{2\sqrt{5}+\sqrt{10}}\right)^2$$
$$=2\sqrt{5}-\sqrt{10}-2i\sqrt{(2\sqrt{5}-\sqrt{10})\cdot(2\sqrt{5}+\sqrt{10})}-2\sqrt{5}-\sqrt{10}$$
$$=-2\sqrt{10}-2i\sqrt{10}$$
$$=-2\sqrt{10}(1+i)$$
$$=-4\sqrt{5}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$=-4\sqrt{5}\,cis\left(\frac{\pi}{4}\right)$$
$$=4\sqrt{5}\,cis\left(\frac{5\pi}{4}\right)$$

b. Alors : $z=2\sqrt[4]{5}cis\left(\frac{5\pi}{8}\right) \vee z=2\sqrt[4]{5}cis\left(\frac{13\pi}{8}\right)$

Finalement : $z=2\sqrt[4]{5}cis\left(\frac{13\pi}{8}\right)$ d'après les signes de Re(z) et Im(z).

c. D'après l'énoncé et a. : $cos\left(\frac{13\pi}{8}\right)=\frac{\sqrt{2\sqrt{5}-\sqrt{10}}}{2\sqrt[4]{5}}$

$$sin\left(\frac{13\pi}{8}\right)=-\frac{\sqrt{2\sqrt{5}+\sqrt{10}}}{2\sqrt[4]{5}}$$

Alors :

$$tan\left(\frac{13\pi}{8}\right)=-\frac{\sqrt{2\sqrt{5}+\sqrt{10}}}{2\sqrt[4]{5}}\cdot\frac{2\sqrt[4]{5}}{\sqrt{2\sqrt{5}-\sqrt{10}}}$$
$$=-\frac{\sqrt{2\sqrt{5}+\sqrt{10}}}{\sqrt{2\sqrt{5}-\sqrt{10}}}\cdot\frac{\sqrt{2\sqrt{5}-\sqrt{10}}}{\sqrt{2\sqrt{5}-\sqrt{10}}}$$
$$=-\frac{\sqrt{10}}{2\sqrt{5}-\sqrt{10}}\cdot\frac{2\sqrt{5}+\sqrt{10}}{2\sqrt{5}+\sqrt{10}}$$
$$=-\frac{10+10\sqrt{2}}{10}$$
$$=-1-\sqrt{2}$$

Question 2 ((2 + 5 + 2) + (3 + 7) = 19 points)

1. a.

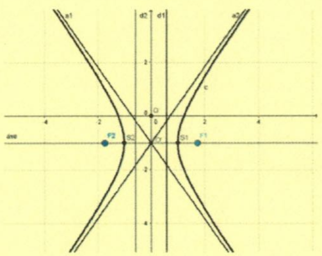
$$\begin{aligned} & 2x^2 = y^2 + 2y + 3 \\ \Leftrightarrow\ & 2x^2 = (y+1)^2 + 2 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 - \frac{(y+1)^2}{2} = 1 \\ \Leftrightarrow\ & X^2 - \frac{Y^2}{2} = 1 \end{aligned}$$

$$où \begin{cases} X = x \\ Y = y + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = X \\ y = Y - 1 \end{cases}$$

Γ est l'hyperbole de centre O'(0 ;-1) et d'axe focal O'X

b. Changement de repère :$(O', \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ $avec$ $O'(0; -1)$ dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
$a = 1; b = \sqrt{2}; c = \sqrt{3}; \varepsilon = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} > 1$.

	$(O', \vec{\imath}, \vec{\jmath})$	$(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$
Axe focal	O'X ≡ Y = 0	O'X ≡ y = -1
Foyers	$F_1(\sqrt{3}; 0); F_2(-\sqrt{3}; 0)$	$F_1(\sqrt{3}; -1); F_2(-\sqrt{3}; -1)$
Sommets	$S_1(1; 0); S_2(-1; 0)$	$S_1(1; -1); S_2(-1; -1)$
Directrices	$d_1 \equiv X = \frac{\sqrt{3}}{3}; d_2 \equiv X = -\frac{\sqrt{3}}{3}$	$d_1 \equiv x = \frac{\sqrt{3}}{3}; d_2 \equiv x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$
Asymptotes	$a_1 \equiv Y = \sqrt{2}\,X; a_2 \equiv Y = -\sqrt{2}\,X$	$a_1 \equiv y = \sqrt{2}\,x - 1;\ a_2 \equiv y = -\sqrt{2}\,x - 1$



2. a.

$$\begin{aligned} & x^2 + 25y^2 + 50\sqrt{5}y + 100 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 + 25\left(y^2 + 2\sqrt{5}y + 5 - 5\right) + 100 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 + 25(y + \sqrt{5})^2 = 25 \\ \Leftrightarrow\ & X^2 + 25Y^2 = 25 \ \ \textit{équation réduite dans } (O', X, Y) \end{aligned}$$

$$où \begin{cases} X = x \\ Y = y + \sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = X \\ y = Y - \sqrt{5} \end{cases}$$

P est une ellipse d'axe focal : O'X avec O' (0 ; - $\sqrt{5}$) dans $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

b. Le point A (5 ; - 4 - $\sqrt{5}$) dans (O, x, y) s'écrit A (5 ; - 4) dans $(O', \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Une équation de la tangente à l'ellipse P en un point $I_0(X_0; Y_0)$ s'écrit :

$$XX_0 + 25YY_0 = 25 \quad (*)$$

Alors : A (5 ; - 4)$\in$T$\Leftrightarrow 5X_0 - 100Y_0 = 25 \Leftrightarrow X_0 = 5 + 20Y_0$

Remplaçons dans l'équation réduite de P :

$$\begin{aligned} & (5 + 20\,Y_0)^2 + 25\,Y_0{}^2 = 25 \\ \Leftrightarrow\ & 25 + 200\,Y_0 + 400\,Y_0{}^2 + 25\,Y_0{}^2 = 25 \\ \Leftrightarrow\ & 425\,Y_0{}^2 + 200\,Y_0 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & Y_0 = 0 \vee Y_0 = -\frac{8}{17} \end{aligned}$$

Alors d'après (*) les deux points de contact sont :

$I_1(5\,; 0)$ $respectivement$ $I_2(-\frac{75}{17}; -\frac{8}{17})$ dans $(O', \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

$I_1(5\,; -\sqrt{5})$ $respectivement$ $I_2(-\frac{75}{17}; -\frac{8}{17} - \sqrt{5})$ dans $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

On en déduit des équations des deux tangentes dans $(O', \vec{\imath}, \vec{\jmath})$:

Tangente $(I_1A) \equiv X = 5$

Tangente $(I_2A) \equiv 3X + 8Y = -17$

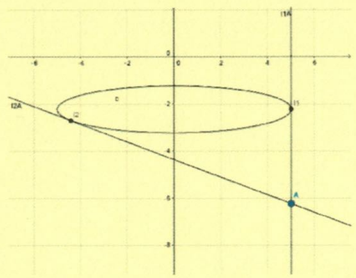
En effet : $-\frac{75}{17}X - 25 \cdot \frac{8}{17}Y = 25 \Leftrightarrow 3X + 8Y = -17$

Et dans $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$:

Tangente $(I_1A) \equiv x = 5$

Tangente $(I_2A) \equiv 3x + 8y + 8\sqrt{5} + 17 = 0$

Uniquement comme illustration (pas demandé):



Question 3 (3 + (3 + 2 + 2 + 3) + (3 + 2) = 18 points)

1.

$$C_{13}^{k} \cdot (\sqrt{5}x^2)^k \cdot (-\tfrac{2}{\sqrt{5}x})^{13-k} = cte \cdot x^8$$
$$\Rightarrow x^{2k}x^{k-13} = x^8$$
$$\Rightarrow k = 7$$

Terme en x^8 : $\quad C_{13}^{7} \cdot (\sqrt{5}x^2)^7 \cdot (-\tfrac{2}{\sqrt{5}x})^{13-7} = 109824\sqrt{5}x^8$

2.A. a. Loi de probabilité de X.

Xi	0	21	40	61
P(X=xi)	$0 \cdot \frac{1}{3} = 0$	$1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$	$0 \cdot \frac{2}{3} = 0$	$1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$

b. Loi de probabilité de Y

Yi	0	40	100	140
P(Y=yi)	$\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{15}$	$\frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{15}$	$\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{15}$	$\frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{15}$

c. Comparons les deux espérances :

$$E(X) = 21 \cdot \frac{1}{3} + 61 \cdot \frac{2}{3} = \frac{143}{3}$$
$$E(Y) = 40 \cdot \frac{8}{15} + 100 \cdot \frac{1}{15} + 140 \cdot \frac{2}{15} = \frac{700}{15} = \frac{140}{3}$$

Trajet choisi : L-F-S

d. Sur un trajet les amendes A possibles inférieures à 50 sont 0, 21 et 40.

Donc : $P(A < 50) = \frac{1}{2}\left(0 + \frac{1}{3} + 0\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{4}{15} + \frac{8}{15}\right) = \frac{1}{6} + \frac{2}{5} = \frac{17}{30}$

2.B. a. Loi binomiale : $p = \frac{1}{5}; q = \frac{4}{5}; n = 10; k = 0 \text{ ou } k = 1 \text{ ou } k = 2$

$$P(au\ plus\ 2\ contrôles) = C_{10}^{0}\left(\frac{1}{5}\right)^0\left(\frac{4}{5}\right)^{10} + C_{10}^{1}\left(\frac{1}{5}\right)^1\left(\frac{4}{5}\right)^{9} + C_{10}^{2}\left(\frac{1}{5}\right)^2\left(\frac{4}{5}\right)^{8}$$
$$= \frac{4^{10} + 10 \cdot 4^9 + 45 \cdot 4^8}{5^{10}}$$
$$= \frac{6619136}{9765625} \approx 68\%$$

b. Soit n le nombre de trajets.

$$P(aucun\ contrôle) = \left(\frac{4}{5}\right)^n$$
$$\left(\frac{4}{5}\right)^n \geq 0{,}1 \Leftrightarrow n \leq log_{0,8}\, 0{,}1$$
$$\Leftrightarrow n \leq 10{,}32$$

Le nombre de trajets maximal vaut 10.

Question 4 (5 points)

$$\begin{cases} x = 1 - \cos\alpha \\ y = 3 + \sin\alpha \end{cases}, \alpha \in \left]-\frac{\pi}{2};\pi\right[\Leftrightarrow \begin{cases} \cos\alpha = 1 - x \\ \sin\alpha = y - 3 \end{cases}, \alpha \in \left]-\frac{\pi}{2};\pi\right[$$
$$\Rightarrow (1 - x)^2 + (y - 3)^2 = 1$$

Les coordonnées vérifient l'équation du cercle C de centre I (1 ;3) et de rayon r=1.

α	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\cos\alpha$		↗		↘		↘	
x	1	↘	0	↗	1	↗	2
$\sin\alpha$		↗		↗		↘	
y	2	↗	3	↗	4	↘	3

Alternative : Faire un tableau des valeurs.

T est l'arc de cercle ouvert de C, du point A (1 ;2) vers le point B (2 ;3), dans le sens des aiguilles d'une montre.