LE GOUVERNEMENT DU GRAND-DUCHÉ DE LUXEMBOURG Ministère de l'Éducation nationale, de l'Enfance et de la Jeunesse	EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES CLASSIQUES **2021** **CORRIGÉ – BARÈME**	
BRANCHE	**SECTION(S)**	**ÉPREUVE ÉCRITE**
Mathématiques 2	**B**	*Durée de l'épreuve :* *240 minutes* *Date de l'épreuve :*

Question 1 (22 points)

$$f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x+1}}-e & \text{si } x\le 0\\ \frac{1}{2}x^2\left(3-2\ln x\right) & \text{si } x>0\end{cases}$$

5 p. a) C.E. : • si $x\le 0$: $x+1\neq 0 \Leftrightarrow x\neq -1$

• si $x>0$: $x>0$ vrai ! donc $dom f=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

continuité

• f est continue sur $]-\infty;-1[$, $]-1;0[$ et $]0;+\infty[$ comme somme/produit/composée de fonctions continues.

• $f(0)=0$

• $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\underbrace{e^{\overbrace{\frac{1}{x+1}}^{\to 1}}}_{\to e}-e\right)=0=f(0)$ • $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{2}\underbrace{x^2}_{\to 0^+}\underbrace{\left(3-2\underbrace{\ln x}_{\to-\infty}\right)}_{\to+\infty}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\overbrace{3-2\ln x}^{\to+\infty}}{\underbrace{\frac{2}{\underbrace{x^2}_{\to 0^+}}}_{\to+\infty}}\overset{(H)}{=}\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{-\frac{2}{x}}{-\frac{4}{x^3}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x^2}{2}=0=f(0)$

• f est donc continue en 0 et $dom_c f=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

dérivabilité

• f est dérivable sur $]-\infty;-1[$, $]-1;0[$ et $]0;+\infty[$ comme somme/produit/composée de fonctions dérivables.

• $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\overbrace{e^{\frac{1}{x+1}}-e}^{\to 0}}{\underbrace{x}_{\to 0}}\overset{(H)}{=}\lim\limits_{x\to 0^-}\underbrace{e^{\frac{1}{x+1}}}_{\to e}\cdot\underbrace{\frac{-1}{(x+1)^2}}_{\to -1}=-e=f_g'(x)$

• $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{2}x^2\left(3-2\ln x\right)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{2}\underbrace{x}_{\to 0^+}\underbrace{\left(3-2\underbrace{\ln x}_{\to-\infty}\right)}_{\to+\infty}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\overbrace{3-2\ln x}^{\to+\infty}}{\underbrace{\frac{2}{\underbrace{x}_{\to 0^+}}}_{\to+\infty}}\overset{(H)}{=}\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{-\frac{2}{x}}{-\frac{2}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0^+}x=0=f_d'(x)$

• $f_g'(x)\neq f_d'(x)$, donc f n'est donc pas dérivable en 0 et $dom f'=\mathbb{R}^*\setminus\{-1\}$.

2,5 p. b) • $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\underbrace{e^{\underbrace{\frac{1}{x+1}}_{\to 0}}}_{\to 1}-e\right)=1-e\,(\approx -1{,}72)$ $\rightarrow$ A.H.G. : $y=1-e$

• $\lim\limits_{x\to-1^-}\left(\underbrace{e^{\underbrace{\frac{1}{x+1}}_{\to-\infty}}}_{\to 0}-e\right)=-e$ $\left[\to \text{"point creux"}(-1;-e)\right]$ • $\lim\limits_{x\to-1^+}\left(\underbrace{e^{\underbrace{\frac{1}{x+1}}_{\to+\infty}}}_{\to+\infty}-e\right)=+\infty$ $\rightarrow$ A.V. : $x=-1$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2}\underbrace{x^2}_{\to+\infty}\underbrace{\left(3-2\underbrace{\ln x}_{\to+\infty}\right)}_{\to-\infty}=-\infty$ $\rightarrow$ pas d'A.H. • $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2}\underbrace{x}_{\to+\infty}\underbrace{\left(3-2\underbrace{\ln x}_{\to+\infty}\right)}_{\to-\infty}=-\infty$ $\rightarrow$ pas d'A.O.

4 p.

c) • $\left(\forall x\in\left]-\infty;-1\right[\cup\left]-1;0\right[\right):\ f'(x)=e^{\frac{1}{x+1}}\cdot\dfrac{-1}{(x+1)^2}=-\dfrac{e^{\frac{1}{x+1}}}{(x+1)^2}<0$

• $\left(\forall x\in\left]0;+\infty\right[\right): f'(x)=x(3-2\ln x)+\dfrac{1}{2}x^2\left(-\dfrac{2}{x}\right)=x(3-2\ln x)-x=\underbrace{x}_{>0}(2-2\ln x)$

• Le signe de $f'(x)$ est celui de $2-2\ln x$.

$2-2\ln x>0\Leftrightarrow 2\ln x<2\Leftrightarrow \ln x<1\Leftrightarrow x<e(\approx 2{,}72)$; $f(e)=\dfrac{1}{2}e^2(3-2\ln e)=\dfrac{e^2}{2}(\approx 3{,}70)$

• tableau des variations

x	$-\infty$		-1		0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
f	$1-e$	↘	$-e\ \Vert\ +\infty$	↘	0	↗	$\frac{e^2}{2}$	↘	$-\infty$

• minimum en $(0;0)$ • maximum en $\left(e;\dfrac{e^2}{2}\right)$

3 p.

d) • $\left(\forall x\in\left]-\infty;-1\right[\cup\left]-1;0\right[\right):\ f''(x)=-\dfrac{e^{\frac{1}{x+1}}\cdot\dfrac{-1}{\cancel{(x+1)^2}}\cdot\cancel{(x+1)^2}-e^{\frac{1}{x+1}}\cdot 2(x+1)}{(x+1)^4}=\dfrac{\overbrace{e^{\frac{1}{x+1}}}^{>0}(2x+3)}{\underbrace{(x+1)^4}_{>0}}$

• Le signe de $f''(x)$ est celui de $2x+3$.

$2x+3>0\Leftrightarrow x>-\dfrac{3}{2}$; $f\left(-\dfrac{3}{2}\right)=e^{\frac{1}{-\frac{1}{2}}}-e=e^{-2}-e=\dfrac{1-e^3}{e^2}(\approx -2{,}58)$

• $\left(\forall x\in\left]0;+\infty\right[\right): f''(x)=1\cdot(2-2\ln x)+x\left(-\dfrac{2}{x}\right)=-2\ln x$

$-2\ln x>0\Leftrightarrow \ln x<0\Leftrightarrow x<1$; $f(1)=\dfrac{1}{2}\cdot 1^2\cdot(3-2\ln 1)=\dfrac{3}{2}$

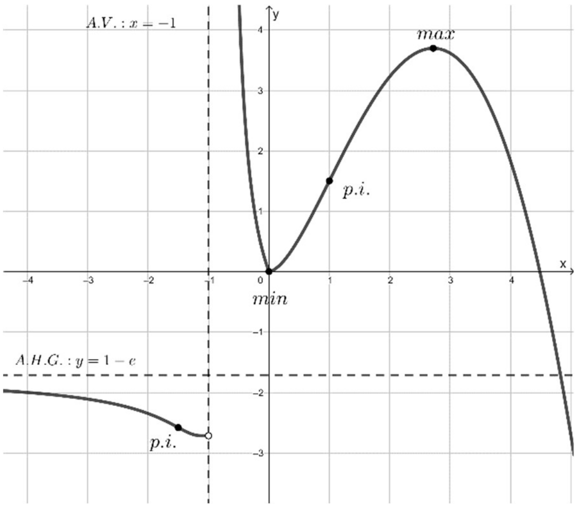
• tableau de concavité

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		-1		0		1		$+\infty$
$f''(x)$		$-$		$+$	$\Vert$	$+$	$\Vert$	$+$		$-$	
C_f		$\cap$	p.i.	$\cup$	$\Vert$	$\cup$		$\cup$	p.i.	$\cap$	

• points d'inflexion : $\left(-\dfrac{3}{2};\dfrac{1-e^3}{e^2}\right)$ et $\left(1;\dfrac{3}{2}\right)$

2 p.

e) →



2,5 p.

2° $A=\displaystyle\int_1^e \frac{1}{2}x^2(3-2\ln x)\,dx$

$\begin{array}{l|l} u(x)=3-2\ln x & v'(x)=\dfrac{1}{2}x^2 \\ \hline u'(x)=-\dfrac{2}{x} & v(x)=\dfrac{1}{6}x^3 \end{array}$

$=\left[\dfrac{1}{6}x^3(3-2\ln x)\right]_1^e+\displaystyle\int_1^e\frac{1}{3}x^2dx$

$=\left[\dfrac{1}{6}x^3(3-2\ln x)+\dfrac{1}{9}x^3\right]_1^e$

$=\left(\dfrac{1}{6}e^3(3-2\ln e)+\dfrac{1}{9}e^3\right)-\left(\dfrac{1}{6}\cdot 1^3(3-2\ln 1)+\dfrac{1}{9}\right)$

$=\dfrac{1}{6}e^3+\dfrac{1}{9}e^3-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{9}$

$=\dfrac{5e^3-11}{18}$ cm²

3 p. 3° $e^{\frac{3x^2-2m}{2x^2}}=x \quad |\ln(\ ),x>0$

$\Leftrightarrow \frac{3x^2-2m}{2x^2}=\ln x \quad |\cdot 2x^2$

$\Leftrightarrow 3x^2-2m=2x^2\ln x \quad |-3x^2$

$\Leftrightarrow -2m=2x^2\ln x-3x^2 \quad |:(-2)$

$\Leftrightarrow m=\frac{1}{2}x^2(3-2\ln x)=f(x)$ sur $]0;+\infty[$

D'après le tableau des variations de f sur $]0;+\infty[$, on en déduit que :

m	$-\infty$		0		$\frac{e^2}{2}$		$+\infty$
#sol de (E_m)		1	$\overbrace{1}$	2	$\overbrace{1}$	0	

Question 2 (6 points)

3 p. a) $f(x)=2x+1+\frac{2^{x+1}}{2^x+1}$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\underbrace{2x}_{\to+\infty}+1+\underbrace{\frac{\overbrace{2^{x+1}}^{\to+\infty}}{\underbrace{2^x+1}_{\to+\infty}}}_{\overset{(*)}{\to 2}}\right)=+\infty$ calcul à part : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\overbrace{2^{x+1}}^{\to+\infty}}{\underbrace{2^x+1}_{\to+\infty}}\overset{(H)}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2^{x+1}\cdot\cancel{\ln 2}}{2^x\cdot\cancel{\ln 2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2\cdot\cancel{2^x}}{\cancel{2^x}}=2 \quad (*)$

• $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2+\underbrace{\frac{1}{\underbrace{x}_{\to+\infty}}}_{\to 0}+\underbrace{\frac{\overbrace{\frac{2^{x+1}}{2^x+1}}^{\overset{(*)}{\to 2}}}{\underbrace{x}_{\to+\infty}}}_{\to 0}\right)=2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-2x]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2^{x+1}}{\underbrace{2^x+1}_{\overset{(*)}{\to 2}}}\right)=3$

ou bien : $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(2x+3)]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\underbrace{\frac{2^{x+1}}{2^x+1}}_{\overset{(*)}{\to 2}}-2\right)=0$

Donc C_f admet une asymptote oblique à droite d'équation $y=2x+3$.

1 p. b) $(\forall x\in\mathbb{R}): f(x)-y_a=2x+1+\frac{2^{x+1}}{2^x+1}-(2x+3)=\frac{2^{x+1}}{2^x+1}-2=\frac{2^{x+1}-2(2^x+1)}{2^x+1}=\frac{-2}{2^x+1}<0$

Donc C_f se trouve toujours en-dessous de l'asymptote oblique à droite.

2 p. c) • $(\forall x\in\mathbb{R}): f'(x)=2+\frac{2^{x+1}\cdot\ln 2\cdot(2^x+1)-2^{x+1}\cdot 2^x\cdot\ln 2}{(2^x+1)^2}=2+\frac{2^{x+1}\cdot\ln 2}{(2^x+1)^2}$

• $f'(x)=2\Leftrightarrow 2+\frac{2^{x+1}\cdot\ln 2}{(2^x+1)^2}=2\Leftrightarrow\frac{2^{x+1}\cdot\ln 2}{(2^x+1)^2}=0\Leftrightarrow 2^{x+1}\cdot\ln 2=0$ impossible

Donc C_f n'admet pas de tangente parallèle à la droite d'équation $y=2x$.

Question 3 (11 points)

2,5 p. 1° $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{4x+1}{4x-3}\right)^{3x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{4x-3+4}{4x-3}\right)^{3x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{4}{4x-3}\right)^{3x+1}$

posons $\frac{1}{n}=\frac{4}{4x-3}\Leftrightarrow 4n=4x-3\Leftrightarrow x=n+\frac{3}{4}$, donc si $x\to+\infty$, alors $n\to+\infty$

$=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{3\left(n+\frac{3}{4}\right)+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{3n+\frac{13}{4}}=\underbrace{\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^3}_{\to e}\cdot\underbrace{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{13}{4}}}_{\to 1}=e^3$

alternative

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4x+1}{4x-3}\right)^{3x+1}=\lim_{x\to+\infty} e^{\ln\left(\left(\frac{4x+1}{4x-3}\right)^{3x+1}\right)}=\lim_{x\to+\infty} e^{\underbrace{\overbrace{(3x+1)}^{\to+\infty}\ln\overbrace{\left(\frac{4x+1}{4x-3}\right)}^{\to 0}}_{\overset{(*)}{\to 3}}}=e^3$$

calcul à part :

$$\lim_{x\to+\infty}\left[(3x+1)\ln\left(\frac{4x+1}{4x-3}\right)\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\overbrace{\ln\left(\frac{4x+1}{4x-3}\right)}^{\to 0}}{\underbrace{\frac{1}{3x+1}}_{\to 0}}\overset{(H)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{\frac{4(4x-3)-4(4x+1)}{(4x-3)^2}}{\frac{4x+1}{4x-3}}}{-\frac{3}{(3x+1)^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-16\cdot\cancel{(4x-3)}\cdot(3x+1)^2}{(4x-3)^{\cancel{2}}\cdot(4x+1)\cdot(-3)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{16\cdot 9x^2}{4x\cdot 4x\cdot 3}=3\ (*)$$

2° $\boxed{4\text{ p.}}$

$27^{x+\frac{2}{3}}+3^{x+1}\geq 9^{x+\frac{3}{2}}+3^{2x}\qquad D=\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow 3^{3x+2}+3^{x+1}\geq 3^{2x+3}+3^{2x}$

$\Leftrightarrow 3^{3x}\cdot 3^2+3^x\cdot 3\geq 3^{2x}\cdot 3^3+3^{2x}$

$\Leftrightarrow 9\cdot 3^{3x}+3\cdot 3^x\geq 27\cdot 3^{2x}+3^{2x}$

$\Leftrightarrow 9\cdot 3^{3x}-28\cdot 3^{2x}+3\cdot 3^x\geq 0\quad |:3^x$

$\Leftrightarrow 9\cdot 3^{2x}-28\cdot 3^x+3\geq 0$

En posant $t=3^x$, on obtient $9t^2-28t+3\geq 0$

$\Delta=28^2-4\cdot 3\cdot 9=676=26^2$

$t_1=\frac{28+26}{18}=3\quad;\quad t_2=\frac{28-26}{18}=\frac{1}{9}$

tableau des signes

t	$-\infty$		$\frac{1}{9}$		3		$+\infty$
$9t^2-28t+3$		$+$	0	$-$	0	$+$	

donc $9t^2-28t+3\geq 0\Leftrightarrow t\leq\frac{1}{9}$ ou $t\geq 3$

Revenons vers x :

si $t\leq\frac{1}{9}$, alors $3^x\leq\frac{1}{9}\Leftrightarrow x\leq -2$

si $t\geq 3$, alors $3^x\geq 3\Leftrightarrow x\geq 1$

$S=]-\infty;-2]\cup[1;+\infty[$

3° $\boxed{4{,}5\text{ p.}}$

C.E.1 : $x^2>0\wedge x^2\neq 1\Leftrightarrow x\neq -1\wedge x\neq 0\wedge x\neq 1$

C.E.2 : $\sqrt{e^{x^2+8}}-e^{3x}\neq 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{e^{x^2+8}}\neq e^{3x}\quad |(\ )^2$

$\Leftrightarrow e^{x^2+8}\neq e^{6x}\quad |\ln(\ )$

$\Leftrightarrow x^2-6x+8\neq 0\overset{\Delta=4}{\Leftrightarrow} x\neq\frac{6+2}{2}=4\wedge x\neq\frac{6-2}{2}=2$

C.E.3 : $\log_{x^2}64>0\Leftrightarrow\frac{\ln 64}{\ln x^2}>0$

$\Leftrightarrow \ln x^2>0\quad |e^{()}$

$\Leftrightarrow x^2>1\Leftrightarrow x>1\vee x<-1$

$D=(]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[)\setminus\{2;4\}$

$$\frac{\left(\log_{\sqrt{3}}\left(\log_{x^2}64\right)-2\right)\cdot\left(2^{3x}-3^{2x-1}\right)}{\sqrt{e^{x^2+8}}-e^{3x}}=0$$

$\Leftrightarrow \underbrace{\log_{\sqrt{3}}\left(\log_{x^2}64\right)-2=0}_{(1)}\vee\underbrace{2^{3x}-3^{2x-1}=0}_{(2)}$

$(1)\Leftrightarrow \log_{\sqrt{3}}\left(\log_{x^2}64\right)=2\quad |\sqrt{3}^{(\ )}$

$\Leftrightarrow \log_{x^2}64=3\quad |\left(x^2\right)^{(\ )}$

$\Leftrightarrow 64=x^6$

$\Leftrightarrow x=-2\vee\underbrace{x=2}_{\notin D}$

$(2)\Leftrightarrow 2^{3x}=3^{2x-1}\quad |\ln()$

$\Leftrightarrow \ln\left(2^{3x}\right)=\ln\left(3^{2x-1}\right)$

$\Leftrightarrow 3x\ln 2=(2x-1)\ln 3$

$\Leftrightarrow (3\ln 2-2\ln 3)x=-\ln 3$

$\Leftrightarrow x=\frac{\ln 3}{2\ln 3-3\ln 2}\quad\left[=\frac{1}{2-3\log_3 2}=\frac{\log_2 3}{2\log_2 3-3}\right]$

$S=\left\{-2;\frac{\ln 3}{2\ln 3-3\ln 2}\right\}$

Question 4 (8 points)

a) $\boxed{2{,}5 \text{ p.}}$

$C \equiv (x-2)^2+(y-2)^2=4 \quad (1)$

$P \equiv y = 2-\sqrt{3}x^2 \quad (2)$

- $(2)\to(1): (x-2)^2+\left(2-\sqrt{3}x^2-2\right)^2=4$

$\Leftrightarrow x^2-4x+4+\left(-\sqrt{3}x^2\right)^2=4 \quad |-4$

$\Leftrightarrow x^2-4x+3x^4=0$

$\Leftrightarrow x\left(3x^3+x-4\right)=0$

$\Leftrightarrow x=0 \vee 3x^3+x-4=0$

- $3x^3+x-4$ admet comme racine évidente $x=1$

	3	0	1	−4
1		3	3	4
	3	3	4	0

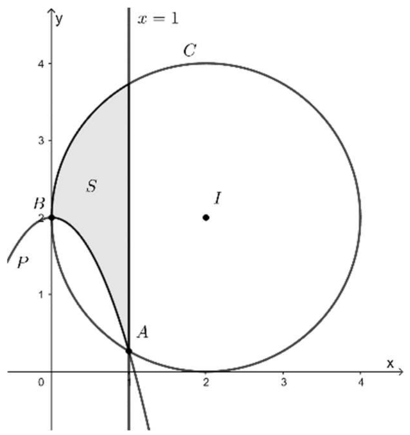
- $3x^3+x-4=0$

$\Leftrightarrow (x-1)\underbrace{\left(3x^2+3x+4\right)}_{\Delta<0\to\text{pas de racine}}=0$

$\Leftrightarrow x=1$

- Finalement :

$C\cap P=\left\{A\left(1;2-\sqrt{3}\right);B(0;2)\right\}$



b) $\boxed{5{,}5 \text{ p.}}$

$C\equiv \ (y-2)^2=4-(x-2)^2$

$\overset{x\in[-2;2]}{\Leftrightarrow}\ y-2=\sqrt{4-(x-2)^2} \vee y-2=-\sqrt{4-(x-2)^2}$

$\to$ demi-cercle supérieur: $y=2+\sqrt{4-(x-2)^2}$

$A=\int_0^2\left(\left(2+\sqrt{4-(x-2)^2}\right)-\left(2-\sqrt{3}x^2\right)\right)dx$

$=\int_0^1\sqrt{3}x^2dx+\int_0^1\sqrt{4-(x-2)^2}\,dx$

posons $x-2=2\sin t$, donc $dx=2\cos t\,dt$ et $t=\arcsin\left(\frac{x-2}{2}\right)$

si $x=0$, alors $t=\arcsin(-1)=-\frac{\pi}{2}$

si $x=1$, alors $t=\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{\pi}{6}$

$=\left[\frac{\sqrt{3}}{3}x^3\right]_0^1+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{6}}\sqrt{4-4\sin^2 t}\cdot 2\cos t\,dt$

$=\frac{\sqrt{3}}{3}+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{6}}2\sqrt{1-\sin^2 t}\cdot 2\cos t\,dt$

$=\frac{\sqrt{3}}{3}+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{6}}2\sqrt{\cos^2 t}\cdot 2\cos t\,dt$

$\sqrt{\cos^2 t}=|\cos t|=\cos t$, car $\cos t\geq 0$ sur $\left[-\frac{\pi}{2};-\frac{\pi}{6}\right]$

$=\frac{\sqrt{3}}{3}+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{6}}4\cos^2 t\,dt$

$=\frac{\sqrt{3}}{3}+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{6}}(2+2\cos 2t)\,dt$

$=\frac{\sqrt{3}}{3}+\left[2t+\sin 2t\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{6}}$

$=\frac{\sqrt{3}}{3}+\left(-\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-(-\pi+0)$

$=\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{3}+\pi$

$=\frac{4\pi-\sqrt{3}}{6}\ \text{cm}^2$

Question 5 (13 points)

2 p.

1° a) • $\left(\forall x\in\left]-2;+\infty\right[\right):\dfrac{ax+b}{4x^2+1}+\dfrac{c}{x+2}=\dfrac{(ax+b)(x+2)+c\left(4x^2+1\right)}{\left(4x^2+1\right)(x+2)}$

$$=\frac{ax^2+2ax+bx+2b+4cx^2+c}{4x^3+8x^2+x+2}$$

$$=\frac{(a+4c)x^2+(2a+b)x+(2b+c)}{4x^3+8x^2+x+2}$$

• Résolvons donc : $\begin{cases} a+4c=-7 & (1)\\ 2a+b=-1 & (2)\\ 2b+c=-8 & (3)\end{cases}$

$(1): a=-7-4c \quad (1')$

$(1')\to(2): 2(-7-4c)+b=-1 \Leftrightarrow b=13+8c \quad (2')$

$(2')\to(3): 2(13+8c)+c=-8 \Leftrightarrow 17c=-34 \Leftrightarrow c=-2 \quad (3')$

$(3')\to(2'): b=13+8\cdot(-2)=-3$

$(3')\to(1'): a=-7-4(-2)=1$

• Finalement : $f(x)=\dfrac{x-3}{4x^2+1}-\dfrac{2}{x+2}$

3 p.

b) $\displaystyle\int_{-\frac12}^{\frac12} f(x)dx=\int_{-\frac12}^{\frac12}\left(\frac18\cdot\frac{8x}{4x^2+1}-\frac32\cdot\frac{2}{(2x)^2+1}-2\cdot\frac{1}{x+2}\right)dx$

$$=\left[\frac18\ln\left|4x^2+1\right|-\frac32\arctan(2x)-2\ln|x+2|\right]_{-\frac12}^{\frac12}$$

$$=\left(\frac18\ln2-\frac32\arctan1-2\ln\frac52\right)-\left(\frac18\ln2-\frac32\arctan(-1)-2\ln\frac32\right)$$

$$=\frac18\ln2-\frac32\cdot\frac{\pi}{4}-2\ln5+2\ln2-\frac18\ln2-\frac32\cdot\frac{\pi}{4}+2\ln3-2\ln2$$

$$=2\ln3-2\ln5-\frac{3\pi}{4}$$

2° a) 1 p.

$$f(x)=\frac{e^{3x}-3e^{-3x}}{e^{3x}+3e^{-3x}}=0$$

$\Leftrightarrow e^{3x}-3e^{-3x}=0$

$\Leftrightarrow e^{3x}=3e^{-3x} \quad |\cdot e^{3x}$

$\Leftrightarrow e^{6x}=3 \quad |\ln(\ )$

$\Leftrightarrow 6x=\ln3$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{\ln3}{6}$

Donc la racine de *f* est $x_0=\dfrac{\ln3}{6}$.

b) 3 p.

$$f(x)=\frac{e^{3x}-3e^{-3x}}{e^{3x}+3e^{-3x}}=\frac13\cdot\frac{3e^{3x}-9e^{-3x}}{e^{3x}+3e^{-3x}}$$

Donc $F(x)=\dfrac13\ln\left(e^{3x}+3e^{-3x}\right)+k, k\in\mathbb{R}$

$F\left(\dfrac{\ln3}{6}\right)=\dfrac{\ln3}{6}$

$\Leftrightarrow \dfrac13\ln\left(e^{3\cdot\frac{\ln3}{6}}+3e^{-3\cdot\frac{\ln3}{6}}\right)+k=\dfrac{\ln3}{6}$

$\Leftrightarrow k=\dfrac{\ln3}{6}-\dfrac13\ln\left(e^{\ln\sqrt3}+3e^{-\ln\sqrt3}\right)$

$\Leftrightarrow k=\dfrac{\ln3}{6}-\dfrac13\ln\left(\sqrt3+3\cdot\dfrac{1}{\sqrt3}\right)$

$\Leftrightarrow k=\dfrac{\ln3}{6}-\dfrac13\ln\left(2\sqrt3\right)$

$\Leftrightarrow k=\dfrac{\ln3}{6}-\dfrac13\left(\ln2+\ln\sqrt3\right)=-\dfrac{\ln2}{3}$

La primitive cherchée est définie par $F(x)=\dfrac13\ln\left(e^{3x}+3e^{-3x}\right)-\dfrac{\ln2}{3}$.

4 p.

3° $\int e^{-\frac{x}{2}}\cdot\cos(3x)dx$

$= -2e^{-\frac{x}{2}}\cdot\cos(3x) - \int 6e^{-\frac{x}{2}}\cdot\sin(3x)dx$

$= -2e^{-\frac{x}{2}}\cdot\cos(3x) + 12e^{-\frac{x}{2}}\cdot\sin(3x) - \int 36e^{-\frac{x}{2}}\cdot\cos(3x)dx$

$= -2e^{-\frac{x}{2}}\cdot\cos(3x) + 12e^{-\frac{x}{2}}\cdot\sin(3x) - 36\int e^{-\frac{x}{2}}\cdot\cos(3x)dx$

$u(x)=\cos(3x)$	$v'(x)=e^{-\frac{x}{2}}$
$u'(x)=-3\sin(3x)$	$v(x)=-2e^{-\frac{x}{2}}$
$u_1(x)=\sin(3x)$	$v_1'(x)=6e^{-\frac{x}{2}}$
$u_1'(x)=3\cos(3x)$	$v_1(x)=-12e^{-\frac{x}{2}}$

En posant $I=\int e^{-\frac{x}{2}}\cdot\cos(3x)dx$, on a :

$I=-2e^{-\frac{x}{2}}\cdot\cos(3x)+12e^{-\frac{x}{2}}\cdot\sin(3x)-36I$

$\Leftrightarrow 37I=-2e^{-\frac{x}{2}}\cdot\cos(3x)+12e^{-\frac{x}{2}}\cdot\sin(3x)$

Donc finalement $\int e^{-\frac{x}{2}}\cdot\cos(3x)dx=\frac{2}{37}e^{-\frac{x}{2}}\cdot\left(6\sin(3x)-\cos(3x)\right)+k, k\in\mathbb{R}$

<u>alternative</u>

$\int e^{-\frac{x}{2}}\cdot\cos(3x)dx$

$=\frac{1}{3}e^{-\frac{x}{2}}\cdot\sin(3x)+\int\frac{1}{6}e^{-\frac{x}{2}}\cdot\sin(3x)dx$

$=\frac{1}{3}e^{-\frac{x}{2}}\cdot\sin(3x)-\frac{1}{18}e^{-\frac{x}{2}}\cdot\cos(3x)-\int\frac{1}{36}e^{-\frac{x}{2}}\cdot\cos(3x)dx$

$=\frac{1}{3}e^{-\frac{x}{2}}\cdot\sin(3x)-\frac{1}{18}e^{-\frac{x}{2}}\cdot\cos(3x)-\frac{1}{36}\int e^{-\frac{x}{2}}\cdot\cos(3x)dx$

$u(x)=e^{-\frac{x}{2}}$	$v'(x)=\cos(3x)$
$u'(x)=-\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}$	$v(x)=\frac{1}{3}\sin(3x)$
$u_1(x)=\frac{1}{6}e^{-\frac{x}{2}}$	$v_1'(x)=\sin(3x)$
$u_1'(x)=-\frac{1}{12}e^{-\frac{x}{2}}$	$v_1(x)=-\frac{1}{3}\cos(3x)$

En posant $I=\int e^{-\frac{x}{2}}\cdot\cos(3x)dx$, on a :

$I=\frac{1}{3}e^{-\frac{x}{2}}\cdot\sin(3x)-\frac{1}{18}e^{-\frac{x}{2}}\cdot\cos(3x)-\frac{1}{36}I$

$\Leftrightarrow\frac{37}{36}I=\frac{1}{3}e^{-\frac{x}{2}}\cdot\sin(3x)-\frac{1}{18}e^{-\frac{x}{2}}\cdot\cos(3x)$

$\Leftrightarrow I=\frac{\overset{12}{\cancel{36}}}{\underset{1}{\cancel{3}}\cdot 37}e^{-\frac{x}{2}}\cdot\sin(3x)-\frac{\overset{2}{\cancel{36}}}{\underset{1}{\cancel{18}}\cdot 37}e^{-\frac{x}{2}}\cdot\cos(3x)$

Donc finalement $\int e^{-\frac{x}{2}}\cdot\cos(3x)dx=\frac{2}{37}e^{-\frac{x}{2}}\cdot\left(6\sin(3x)-\cos(3x)\right)+k, k\in\mathbb{R}$