LE GOUVERNEMENT DU GRAND-DUCHÉ DE LUXEMBOURG Ministère de l'Éducation nationale, de l'Enfance et de la Jeunesse	EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES CLASSIQUES **2021** **CORRIGÉ – BARÈME**	
BRANCHE	**SECTION(S)**	**ÉPREUVE ÉCRITE**
Mathématiques II	**C, D**	*Durée de l'épreuve :* 2h 45 min *Date de l'épreuve :* 21/05/2021

Question 1 **[4+6=10 points]**

1) Voir manuel *EM66* p. 56.
   - Démonstration de $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$: voir manuel *EM66* p. 56. [2,5 p]
   - Si $x = b$, on obtient $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$. [0,5 p]
   - Si $b = 10$, on obtient $\log_a x = \dfrac{\log x}{\log a}$. [0,5 p]
   - Si $b = e$, on obtient $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$. [0,5 p]

2) $\log_6 (x+2) - \log_{\sqrt{6}} (3-2x) \geq \log_{\frac{1}{6}} (7)$

   Conditions d'existence :

   (i) $x + 2 > 0 \Leftrightarrow x > -2$ (ii) $3 - 2x > 0 \Leftrightarrow -2x > -3 \Leftrightarrow x < \frac{3}{2}$

   $\mathrm{dom}_I = \left]-2; \frac{3}{2}\right[$ [1 p]

$$
\begin{aligned}
& \log_6 (x+2) - \log_{\sqrt{6}} (3-2x) \geq \log_{\frac{1}{6}} (7) \\
\Leftrightarrow\quad & \log_6 (x+2) - \frac{\log_6 (3-2x)}{\log_6 \left(\sqrt{6}\right)} \geq \frac{\log_6 (7)}{\log_6 \left(\frac{1}{6}\right)} \\
\Leftrightarrow\quad & \log_6 (x+2) - \frac{\log_6 (3-2x)}{\frac{1}{2}} \geq \frac{\log_6 (7)}{-1} \\
\Leftrightarrow\quad & \log_6 (x+2) - 2\log_6 (3-2x) \geq -\log_6 (7) \\
\Leftrightarrow\quad & \log_6 (7) + \log_6 (x+2) \geq 2\log_6 (3-2x) \\
\Leftrightarrow\quad & \log_6 [7(x+2)] \geq \log_6 (3-2x)^2 \\
\Leftrightarrow\quad & 7(x+2) \geq (3-2x)^2 \qquad [\log_6 \text{ bij. strict. } \nearrow] \\
\Leftrightarrow\quad & 7x + 14 \geq 9 - 12x + 4x^2 \\
\Leftrightarrow\quad & -4x^2 + 19x + 5 \geq 0 \\
\Leftrightarrow\quad & 4x^2 - 19x - 5 \leq 0 \qquad \left[\Delta = 441 > 0, x_1 = 5, x_2 = -\frac{1}{4}\right]
\end{aligned}
$$

[3,5 p]

x	$-\infty$		$-\frac{1}{4}$		5		$+\infty$
$4x^2 - 19x - 5$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$\mathcal{S} = \left[-\frac{1}{4}; 5\right] \cap \left]-2; \frac{3}{2}\right[= \left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right[$ [1,5 p]

1/1

Question 2 **[(4+2+3,5+3,5+2+3)+5=23 points]**

$f(x) = e^{-x}\left(4x^2 - 1\right)$

1) a) • $\text{dom}f = \mathbb{R}$ [0,5 p]

• $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \underbrace{e^{-x}}_{\to+\infty} \underbrace{\left(4x^2-1\right)}_{\to+\infty} = +\infty$; pas d'A.H. à gauche

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \underbrace{e^{-x}}_{\to+\infty} \underbrace{\left(4x - \dfrac{1}{x}\right)}_{\to+\infty} = +\infty$; pas d'A.O. à gauche [1 p]

• $$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty} \underbrace{e^{-x}}_{\to 0} \underbrace{\left(4x^2-1\right)}_{\to+\infty} && \text{f.i.} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{4x^2-1}{e^x} \longrightarrow \frac{+\infty}{+\infty} && \text{f.i.} \\ &\overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{8x}{e^x} \longrightarrow \frac{+\infty}{+\infty} && \text{f.i.} \\ &\overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{8}{e^x} \longrightarrow \frac{8}{+\infty} \\ &= 0 \end{aligned}$$

C_f admet une A.H. à droite d'équation $y = 0$. [2,5 p]

b) $\forall\, x \in \text{dom}f : \delta(x) = f(x) - 0 = \underbrace{e^{-x}}_{>0}\left(4x^2 - 1\right)$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$\delta(x) = f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

[1 p]

C_f est au-dessus de son A.H. si $x \in \left]-\infty; -\frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2}; \infty\right[$.

C_f coupe son A.H. en $\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$ et $\left(\frac{1}{2}; 0\right)$.

C_f est au-dessous de son A.H. si $x \in \left]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right[$. [1 p]

c) $\forall\, x \in \text{dom}f' = \mathbb{R} : f'(x) = -e^{-x}\left(4x^2-1\right) + e^{-x}\cdot 8x = e^{-x}\left(1 + 8x - 4x^2\right)$ [1 p]

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 8x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{8 \pm 4\sqrt{5}}{8} \Leftrightarrow x = \dfrac{2 \pm \sqrt{5}}{2}$

$$\left[\Delta = 80, x_1 = \frac{2-\sqrt{5}}{2}, x_2 = \frac{2+\sqrt{5}}{2}\right]$$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(x_1)$	$\nearrow$	$f(x_2)$	$\searrow$	0

Coordonnées des extrema :

minimum : $E_1\left(x_1; f(x_1)\right)$, avec $x_1 = \dfrac{2-\sqrt{5}}{2} \approx -0,12$ et $f(x_1) = \left(8 - 4\sqrt{5}\right) e^{\frac{\sqrt{5}}{2}-1} \approx -1,06$

maximum : $E_2\left(x_2; f(x_2)\right)$, avec $x_2 = \dfrac{2+\sqrt{5}}{2} \approx 2,12$ et $f(x_2) = \left(8 + 4\sqrt{5}\right) e^{-\frac{\sqrt{5}}{2}-1} \approx 2,04$ [2,5 p]

d) $\forall\, x \in \text{dom}f'' = \mathbb{R} : f''(x) = -e^{-x}\left(1 + 8x - 4x^2\right) + e^{-x}\left(8 - 8x\right) = e^{-x}\left(4x^2 - 16x + 7\right)$ [1 p]

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 16x + 7 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{7}{2}$ ou $x = \frac{1}{2}$ $[\Delta = 144]$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$\frac{7}{2}$		$+\infty$
$f''(x)$		+	0	−	0	+	
C_f		$\smile$	p.i.	$\frown$	p.i.	$\smile$	

Coordonnées des points d'inflexions : $I_1\left(\frac{1}{2};0\right)$ et $I_2\left(\frac{7}{2};f(\frac{7}{2})\right)$, avec $f(\frac{7}{2}) = 48e^{-3,5} \approx 1,45$ [2,5 p]

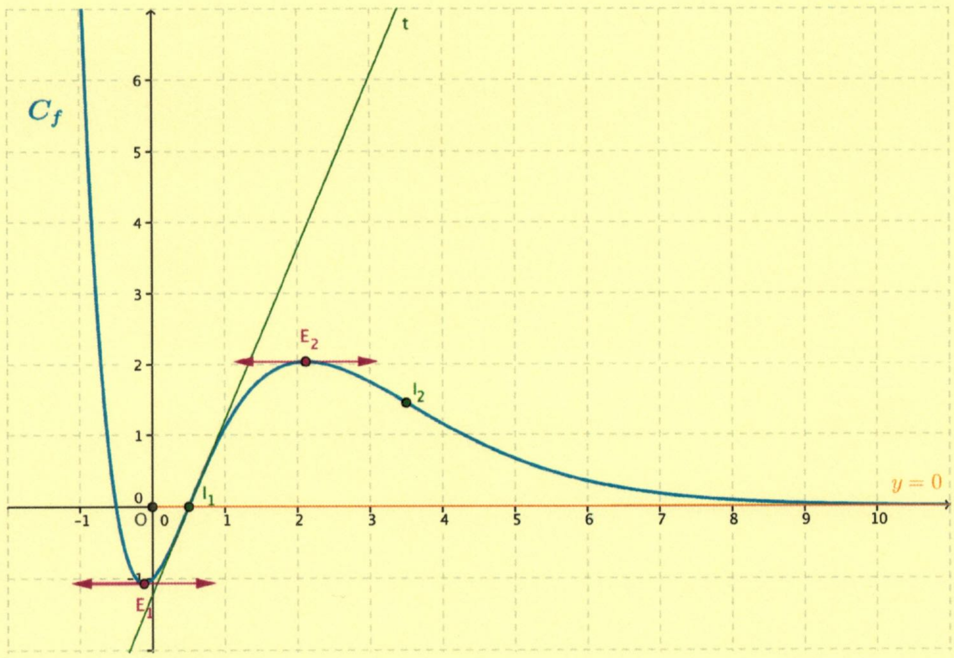
e) Équation de la tangente t au point d'abscisse $\frac{1}{2}$:

$$y = f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) \text{ avec } f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{\sqrt{e}} \text{ et } f\left(\frac{1}{2}\right) = 0.$$

Donc

$$t \equiv y = \frac{4}{\sqrt{e}}x - \frac{2}{\sqrt{e}}.$$ [2 p]

f)



[3 p]

2) Sur $[1/2; 10]$, C_f se situe au-dessus de l'axe des abscisses.

$$\mathcal{A} = \int_{\frac{1}{2}}^{10} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{2}}^{10} e^{-x}\left(4x^2 - 1\right)\,\mathrm{d}x$$

IPP :

$u(x) = 4x^2 - 1$	$v'(x) = e^{-x}$
$u'(x) = 8x$	$v(x) = -e^{-x}$

$$\mathcal{A} = \left[-e^{-x}\left(4x^2 - 1\right)\right]_{\frac{1}{2}}^{10} + 8\int_{\frac{1}{2}}^{10} xe^{-x}\,\mathrm{d}x$$

IPP : $\boxed{\begin{array}{ll} u(x) = x & v'(x) = e^{-x} \\ u'(x) = 1 & v(x) = -e^{-x} \end{array}}$

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \left[-e^{-x}\left(4x^2-1\right)\right]_{\frac{1}{2}}^{10} + \left[-8xe^{-x}\right]_{\frac{1}{2}}^{10} + 8\int_{\frac{1}{2}}^{10} e^{-x}\,\mathrm{d}x \\
&= \left[-e^{-x}\left(4x^2-1\right)\right]_{\frac{1}{2}}^{10} + \left[-8xe^{-x}\right]_{\frac{1}{2}}^{10} + \left[-8e^{-x}\right]_{\frac{1}{2}}^{10} \\
&= \left[-e^{-x}\left(4x^2+8x+7\right)\right]_{\frac{1}{2}}^{10} \\
&= -e^{-10}(400+80+7) + e^{-0,5}(1+4+7) \\
&= 12e^{-0,5} - 487e^{-10} \\
&\approx 7,26 \text{ u.a.}
\end{aligned}$$

[5 p]

Question 3 **[4+2=6 points]**

1) $$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+6}{x+3}\right)^{2x-4} = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{3}{x+3}\right)^{2x-4}$$

$\boxed{\begin{array}{l}\text{Posons : } h = \dfrac{3}{x+3} \Leftrightarrow x+3 = \dfrac{3}{h} \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{h} - 3 \\ \text{Si } x \longrightarrow +\infty \text{, alors } h \longrightarrow 0.\end{array}}$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+6}{x+3}\right)^{2x-4} &= \lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{6}{h}-6-4} \\
&= \lim_{h\to 0}\left\{\left[\underbrace{(1+h)^{\frac{1}{h}}}_{\to e}\right]^6 \cdot \underbrace{(1+h)^{-10}}_{\to 1}\right\} \\
&= e^6
\end{aligned}$$

[4 p]

2) $$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{\log_4\left(\frac{5}{6^{-x}}\right)} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{\overbrace{\left(\log_4\left(\frac{5}{6^{-x}}\right)\right)}_{\to+\infty}} = 0$$

Calcul à part : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\log_4\left(\frac{5}{6^{-x}}\right) = \log_4\underbrace{\left(\frac{5}{\underbrace{6^{-x}}_{\to 0^+}}\right)}_{\to+\infty} = +\infty$ [2 p]

Question 4 **[2+4=6 points]**

1) Sur $\left]-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right[$:

$$\int\frac{\sin(4x)}{\cos^3(2x)}\,\mathrm{d}x = \int\frac{2\sin(2x)\cos(2x)}{\cos^3(2x)}\,\mathrm{d}x = \int\frac{2\sin(2x)}{\cos^2(2x)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\cos(2x)} + C \qquad (C\in\mathbb{R})$$

[2 p]

---

2)
$$\int_0^{\frac{3}{2}} \frac{2x+5}{\sqrt{9-x^2}}\,\mathrm{d}x = -2\int_0^{\frac{3}{2}} \frac{-x}{\sqrt{9-x^2}}\,\mathrm{d}x + 5\int_0^{\frac{3}{2}} \frac{\frac{1}{3}}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{3}\right)^2}}\,\mathrm{d}x$$
$$= -2\left[\sqrt{9-x^2}\right]_0^{\frac{3}{2}} + 5\left[\arcsin\left(\frac{x}{3}\right)\right]_0^{\frac{3}{2}}$$
$$= -2\left[\sqrt{\frac{27}{4}}-3\right] + 5\left[\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) - \arcsin(0)\right]$$
$$= -2\left[\sqrt{\frac{27}{4}}-3\right] + 5\left[\frac{\pi}{6}-0\right]$$
$$= 6 - 3\sqrt{3} + \frac{5\pi}{6}$$
[4 p]

Question 5 **[3+4=7 points]**

1) $\forall\, x \in \mathbb{R}\setminus\{\frac{1}{2}\}$:

$$f(x) = \frac{ax+b}{x^2+4} + \frac{c}{2x-1}$$
$$\Leftrightarrow \frac{7x^2-4x+13}{(x^2+4)(2x-1)} = \frac{(ax+b)(2x-1)+c(x^2+4)}{(x^2+4)(2x-1)}$$
$$\Leftrightarrow \frac{7x^2-4x+13}{(x^2+4)(2x-1)} = \frac{2ax^2+2bx-ax-b+cx^2+4c}{(x^2+4)(2x-1)}$$
$$\Leftrightarrow 7x^2-4x+13 = (2a+c)x^2+(2b-a)x-b+4c$$
[1 p]

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a+c=7 \\ 2b-a=-4 \\ -b+4c=13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=7-2a \\ 2b-a=-4 \\ -b+28-8a=13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=7-2a \\ a=2b+4 \\ -b+15-16b-32=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c=7-2a \\ a=2b+4 \\ 17b=-17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-1 \\ c=3 \end{cases}$$

Donc : $f(x) = \dfrac{2x-1}{x^2+4} + \dfrac{3}{2x-1}$. [2 p]

2) $\forall\, x \in \mathbb{R}\setminus\{\frac{1}{2}\}$:

$$f(x) = \frac{2x}{x^2+4} - \frac{1}{x^2+4} + \frac{3}{2x-1} = \frac{2x}{x^2+4} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1} + \frac{3}{2}\cdot\frac{2}{2x-1}$$

et les primitives de f sont données par

$$F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x = \ln\left(x^2+4\right) - \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{3}{2}\ln|2x-1| + C \qquad (C\in\mathbb{R}).$$

Déterminons C :

$F(0) = \ln 2 \Leftrightarrow \ln 4 - \frac{1}{2}\arctan 0 + \frac{3}{2}\ln 1 + C = \ln 2 \Leftrightarrow C = \ln 2 - 2\ln 2 \Leftrightarrow C = -\ln 2$

Sur $I = \left]-\infty;\frac{1}{2}\right[$:

$$F(x) = \ln\left(x^2+4\right) - \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{3}{2}\ln(1-2x) - \ln 2$$
[4 p]

Question 6 **[3+1+4=8 points]**

1) $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) \leq 0 \Leftrightarrow 2^{2x} - 6 \cdot 2^x + 5 \leq 0 \qquad (\star)$$

Posons $t = 2^x > 0$:

$$(\star) \Leftrightarrow t^2 - 6t + 5 \leq 0 \qquad [\Delta = 16, t_1 = 1, t_2 = 5]$$

t	$-\infty$		1		5		$+\infty$
$t^2 - 6t + 5$		$+$	0	$-$	0	$+$	

[1,5 p]

$$\begin{aligned}(\star) &\Leftrightarrow t^2 - 6t + 5 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow 1 \leq t \leq 5 \\ &\Leftrightarrow 1 \leq 2^x \leq 5 \\ &\Leftrightarrow \log_2 1 \leq \log_2 2^x \leq \log_2 5 \qquad [\log_2 \text{ bij. strict. } \nearrow] \\ &\Leftrightarrow 0 \leq x \leq \log_2 5\end{aligned}$$

$\mathcal{S} = [0; \log_2 5]$ [1,5 p]

2)

x	$-\infty$		0		$\log_2 5$		$+\infty$
$f(x) = 2^{2x} - 6 \cdot 2^x + 5$		$+$	0	$-$	0	$+$	

[1 p]

3) $\forall\, x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = 2^{2x} - 6 \cdot 2^x + 5$$

et les primitives de f sont données par

$$F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2^{2x}}{2\ln 2} - 6 \cdot \frac{2^x}{\ln 2} + 5x + k \qquad (k \in \mathbb{R}).$$ [1,5 p]

Aire :

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \int_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= F(0) - F(-1) - F(2) + F(0) \\ &= 2 \cdot F(0) - F(-1) - F(2) \\ &= 2 \cdot \left(\frac{1}{2\ln 2} - 6 \cdot \frac{1}{\ln 2} + 0\right) - \left(\frac{\frac{1}{4}}{2\ln 2} - 6 \cdot \frac{\frac{1}{2}}{\ln 2} - 5\right) - \left(\frac{16}{2\ln 2} - 6 \cdot \frac{4}{\ln 2} + 10\right) \\ &= \frac{1}{\ln 2} - \frac{12}{\ln 2} - \frac{1}{8\ln 2} + \frac{3}{\ln 2} + 5 - \frac{8}{\ln 2} + \frac{24}{\ln 2} - 10 \\ &= \frac{63}{8\ln 2} - 5 \\ &\approx 6{,}36 \text{ u.a.}\end{aligned}$$

[2,5 p]