



BRANCHE	SECTION(S)	ÉPREUVE ÉCRITE
Mathématiques II	C, D	Durée de l'épreuve : 2h 45min Date de l'épreuve : 21/05/2021

**Question 1**

[4+6=10 points]

- 1) Démontrez la propriété suivante :

Si  $a$  et  $b$  sont des réels strictement positifs distincts de 1, alors, pour tout réel  $x$  strictement positif,

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}.$$

Déduisez-en trois cas particuliers importants.

- 2) Résolvez, dans  $\mathbb{R}$ , l'inéquation suivante :

$$\log_6(x+2) - \log_{\sqrt{6}}(3-2x) \geq \log_{\frac{1}{6}} 7.$$

**Question 2**

[(4+2+3,5+3,5+2+3)+5=23 points]

- 1) Soit  $f$  la fonction définie par

$$f(x) = e^{-x}(4x^2 - 1)$$

et soit  $C_f$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.

- a) Déterminez le domaine de définition et étudiez le comportement asymptotique de  $f$ .  
b) Étudiez la position de  $C_f$  par rapport à ses asymptotes horizontales ou obliques éventuelles.  
c) Montrez que

$$f'(x) = e^{-x}(1 + 8x - 4x^2) \quad (\forall x \in \text{dom} f').$$

Déduisez-en le tableau des variations et précisez les extrema éventuels.

- d) Calculez la dérivée seconde de  $f$ , étudiez la concavité de  $C_f$  et précisez les coordonnées des points d'inflexion éventuels.  
e) Déterminez une équation de la tangente  $t$  à  $C_f$  au point d'abscisse  $\frac{1}{2}$ .  
f) Représentez graphiquement la fonction  $f$  et la tangente  $t$  dans un repère orthonormé du plan d'unité 1 cm.
- 2) Calculez la valeur exacte de l'aire de la partie du plan délimitée par  $C_f$ , l'axe des abscisses et les deux droites d'équations  $x = \frac{1}{2}$  et  $x = 10$  respectivement.

**Question 3**

[4+2=6 points]

Calculez les limites suivantes.

1)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x+6}{x+3} \right)^{2x-4}$

2)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2}{3} \right)^{\log_4 \left( \frac{5}{6-x} \right)}$

**Question 4**

[2+4=6 points]

Calculez les intégrales suivantes.

1)  $\int \frac{\sin(4x)}{\cos^3(2x)} dx$  sur  $\left] -\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4} \right[$

2)  $\int_0^{\frac{3}{2}} \frac{2x+5}{\sqrt{9-x^2}} dx$

**Question 5**

[3+4=7 points]

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\text{dom} f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$  par

$$f(x) = \frac{7x^2 - 4x + 13}{(x^2 + 4)(2x - 1)}.$$

- 1) Déterminez les réels  $a$  et  $b$  tels que

$$f(x) = \frac{ax + b}{x^2 + 4} + \frac{c}{2x - 1} \quad (\forall x \in \text{dom} f).$$

- 2) Déduisez-en, sur un intervalle  $I$  à préciser, la primitive de  $f$  qui prend la valeur  $\ln 2$  pour  $x = 0$ .

**Question 6**

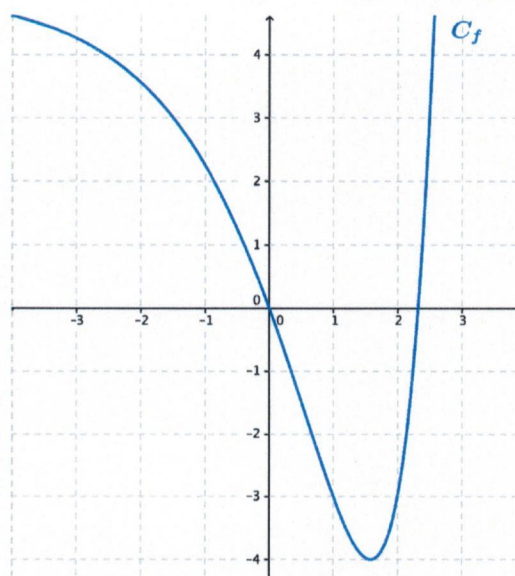
[3+1+4=8 points]

Soit la fonction  $f$  définie par

$$f(x) = 2^{2x} - 6 \cdot 2^x + 5$$

et soit  $C_f$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.

- 1) Résolvez, dans  $\mathbb{R}$ , l'inéquation  $f(x) \leq 0$ .
- 2) Étudiez le signe de la fonction  $f$  en utilisant les résultats du point 1).
- 3) Calculez l'aire de la partie du plan délimitée par  $C_f$ , l'axe des abscisses et les deux droites d'équations  $x = -1$  et  $x = 2$  respectivement.



N.B. : Vous pouvez, si nécessaire, utiliser les informations de la figure pour le calcul d'aire.

## Formules trigonométriques

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ $\cos^2 x = \frac{1}{1 + \tan^2 x}$			$\sin^2 x = \frac{\tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
$\sin(\pi - x) = \sin x$ $\cos(\pi - x) = -\cos x$ $\tan(\pi - x) = -\tan x$	$\sin(\pi + x) = -\sin x$ $\cos(\pi + x) = -\cos x$ $\tan(\pi + x) = \tan x$	$\sin(-x) = -\sin x$ $\cos(-x) = \cos x$ $\tan(-x) = -\tan x$		
$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$ $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$ $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$ $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$ $\tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\cot x$			
$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$ $\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$ $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$ $\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$	$\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$ $\tan(x - y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$			
$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ $\sin 2x = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x}$	$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$ $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$ $\cos 2x = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$	$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$		
$\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$	$\cos 3x = -3 \cos x + 4 \cos^3 x$			
$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$ $\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}$ $\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$ $\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$	$\tan p + \tan q = \frac{\sin(p+q)}{\cos p \cos q}$ $\tan p - \tan q = \frac{\sin(p-q)}{\cos p \cos q}$			
$\sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$ $\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$ $\sin x \sin y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]$				