LE GOUVERNEMENT
DU GRAND-DUCHÉ DE LUXEMBOURG
Ministère de l'Éducation nationale,
de l'Enfance et de la Jeunesse

EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES CLASSIQUES
2021
CORRIGÉ – BARÈME

BRANCHE	SECTION(S)	ÉPREUVE ÉCRITE
Mathématiques I	**C**	*Durée de l'épreuve :* 1 h 45 minutes *Date de l'épreuve :* 01/06/21

Question 1 (12 + (7 + 3) = 22 points)

1. $3z^3-(8-9i)z^2+(9-23i)z-36-12i=0$ (E)

$z=bi$ $(b\in\mathbb{R})$ est une racine imaginaire pure de (E)

$\Leftrightarrow -3b^3i+(8-9i)b^2+(9-23i)bi-36-12i=0$

$\Leftrightarrow \left(8b^2+23b-36\right)+i\left(-3b^3-9b^2+9b-12\right)=0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8b^2+23b-36=0 & (1) \\ -3b^3-9b^2+9b-12=0 & (2) \end{cases}$$

Posons $8b^2+23b-36=0$ $\quad \Delta=529+1152=1681$

$b=\dfrac{-23-41}{16}$ ou $b=\dfrac{-23+41}{16} \Leftrightarrow b=-4$ ou $b=\dfrac{9}{8}$

$b=-4$ est aussi solution de (2) car $-3(-4)^3-9(-4)^2+9(-4)-12=0$

Donc $z=-4i$ est la racine imaginaire pure de (E).

	3	$-8+9i$	$9-23i$	$-36-12i$
$-4i$		$-12i$	$-12+32i$	$36+12i$
	3	$-8-3i$	$-3+9i$	0

D'où : (E) $\Leftrightarrow (z+4i)\left(3z^2+(-8-3i)z-3+9i\right)=0 \Leftrightarrow z=-4i$ ou $3z^2+(-8-3i)z-3+9i=0$

Résolvons $3z^2+(-8-3i)z-3+9i=0$.

$\Delta=(-8-3i)^2-12(-3+9i)=91-60i$

$u=x+iy$ ($x, y\in\mathbb{R}$) est une racine carrée complexe de $91-60i$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2=91 & (3) \\ x^2+y^2=109 & (4) \\ 2xy=-60 & \Rightarrow \ x \text{ et } y \text{ sont de signes contraires} \end{cases}$$

(3) + (4): $2x^2=200 \Leftrightarrow x^2=100 \Leftrightarrow x=10$ ou $x=-10$

(4) – (3): $2y^2=18 \Leftrightarrow y^2=9 \Leftrightarrow y=3$ ou $y=-3$

Les racines carrées complexes de $91-60i$ sont $10-3i$ et $-10+3i$.

Donc $z_1=\dfrac{8+3i+10-3i}{6}=3$ et $z_2=\dfrac{8+3i-10+3i}{6}=-\dfrac{1}{3}+i$

$$S=\left\{-4i;3;-\frac{1}{3}+i\right\}$$

2. $z_1=\left(1+i\sqrt{3}\right)^2$; $z_2=2(1-i)$ et $Z=\dfrac{z_1}{z_2}$.

a) formes trigonométriques :

$$z_1=\left(1+i\sqrt{3}\right)^2=\left(2\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^2=4\operatorname{cis}\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$z_2=2(1-i)=2\sqrt{2}\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$Z=\frac{z_1}{z_2}=\frac{4\operatorname{cis}\left(\frac{2\pi}{3}\right)}{2\sqrt{2}\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right)}=\sqrt{2}\operatorname{cis}\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\operatorname{cis}\left(\frac{11\pi}{12}\right)$$

formes algébriques:

$$z_1=\left(1+i\sqrt{3}\right)^2=\left(1+2\sqrt{3}i-3\right)=-2+2\sqrt{3}i$$

$$z_2=2-2i$$

$$Z=\frac{z_1}{z_2}=\frac{-2+2\sqrt{3}i}{2-2i}=\frac{-2+2\sqrt{3}i}{2(1-i)}\cdot\frac{1+i}{1+i}=\frac{-2+2\sqrt{3}i-2i-2\sqrt{3}}{4}=\frac{-1-\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}-1}{2}i$$

b) On a donc:

$$\sqrt{2}\operatorname{cis}\left(\frac{11\pi}{12}\right)=\frac{-1-\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}-1}{2}i$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{cis}\left(\frac{11\pi}{12}\right)=\frac{-1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\cos\left(\dfrac{11\pi}{12}\right)=\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\dfrac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\\[2ex] \sin\left(\dfrac{11\pi}{12}\right)=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\dfrac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\end{cases}$$

Question 2 (5 +(1+6) = 12 points)

1. Intersection des deux plans

$$\begin{cases} 3x-y+z=0 \\ x-y+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x-y+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ -y+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ z=y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=k \quad k\in\mathbb{R} \\ z=k \end{cases}$$

Les deux plans se coupent selon la droite Δ passant par le point O(0,0,0) et de vecteur directeur $\vec{u}(0,1,1)$.

système d'équations paramétriques de la droite d passant par le point P(2, 3, 5) et parallèle à Δ :

$$\begin{cases} x=2 \\ y=3+l \quad 1\in\mathbb{R} \\ z=5+l \end{cases}$$

2.

a) $A(-1;2;6)$, $B(5;-7;-4)$, $C(2;-3;5)$, $D(4;6;-1)$ et $E(3;-4;2)$

$\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}2\\9\\-6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CE}\begin{pmatrix}1\\-1\\-3\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires, donc C, D et E ne sont pas alignés.

b) Vecteur directeur de la droite (AB) : $\overrightarrow{AB}(6;-9;-10)$

$$(AB)\equiv\begin{cases} x=-1+6k \\ y=2-9k \quad k\in\mathbb{R} \\ z=6-10k \end{cases}$$

$M(x,y,z)\in(CDE)$

$\Leftrightarrow \text{dét}\left(\overrightarrow{CM},\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CE}\right)=0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-2 & 2 & 1 \\ y+3 & 9 & -1 \\ z-5 & -6 & -3 \end{vmatrix}=0$$

$\Leftrightarrow -27(x-2)-2(z-5)-6(y+3)-9(z-5)-6(x-2)+6(y+3)=0$

$\Leftrightarrow -33(x-2)-11(z-5)=0$

$\Leftrightarrow -33x-11z+121=0$

$\Leftrightarrow 3x+z-11=0$

$I(x,y,z)\in(AB)\cap(CDE)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-1+6k & (1) \\ y=2-9k & (2) \\ z=6-10k & (3) \\ 3x+z-11=0 & (4) \end{cases}$$

(1), (2), (3) dans (4) :

$3(-1+6k)+(6-10k)-11=0$

$\Leftrightarrow -8+8k=0$

$\Leftrightarrow k=1$

Donc $I\left(5;-7;-4\right)$.

Question 3 (10 points)

1. Le système d'équations $\begin{cases} x+my+2z=m \\ -2x+y+(m-2)z=1 \\ mx+y+2z=2m-1 \end{cases}$ avec $m\in\mathbb{R}$ admet une solution unique

$\Leftrightarrow \Delta_m \neq 0$

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & m & 2 \\ -2 & 1 & m-2 \\ m & 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$

$\Leftrightarrow 2+m^2(m-2)-4-2m-(m-2)+4m\neq 0$

$\Leftrightarrow 2+m^3-2m^2-4-2m-m+2+4m\neq 0$

$\Leftrightarrow m^3-2m^2+m\neq 0$

$\Leftrightarrow m(m^2-2m+1)\neq 0$

$\Leftrightarrow m(m-1)^2\neq 0$

$\Leftrightarrow m\neq 0$ et $m\neq 1$

Le système admet une solution unique pour $m\in\mathbb{R}^*\setminus\{1\}$.

2. Si $m=0$, le système s'écrit : $\begin{cases} x+2z=0 \\ -2x+y-2z=1 \\ y+2z=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2z \\ 2z+y=1 \\ y+2z=-1 \end{cases}$ impossible,

donc $S=\varnothing$.

Interprétation géométrique : les trois équations du système représentent trois plans de l'espace qui n'ont aucun point commun.

Si $m=1$, le système s'écrit :

$$\begin{cases} x+y+2z=1 & (1) \\ -2x+y-z=1 & (2) \\ x+y+2z=1 & (3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+2z=1 & (1) \\ -2x+y-z=1 & (2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y+z=1 & \big((2)+2\cdot(1)\big):3 \\ x+y+2z=1 & \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y+z=1 & \\ x+z=0 & (2)-(1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=1-z \\ x=-z \end{cases}$$

Le système est simplement indéterminé. Posons $z=k\in\mathbb{R}$.

Donc $S=\{(-k;1-k;k)\,|\,k\in\mathbb{R}\}$.

Interprétation géométrique : Les équations (1) et (3) représentent un même plan de l'espace qui coupe le plan représenté par (2) suivant la droite d'équations paramétriques :

$\begin{cases} x=-k \\ y=1-k \\ z=k \end{cases}$ avec $k\in\mathbb{R}$, passant par le point A(0;1 ;0) et de vecteur directeur $\vec{u}(-1;-1;1)$.

Question 4 (1 + 1 + 1 + 2 + 4 + 4 + 3 = 16 points)

Une urne contient les 6 jetons suivants : $\left\{\boxed{1},\boxed{2},\boxed{3},\boxed{4},\boxed{5},\boxed{6}\right\}$.

1. On tire sans ordre 4 jetons parmi 6.
   On peut former $C_6^4 = 15$ tirages.

2. On tire avec ordre sans remise 6 jetons parmi 6.
   On peut former $P_6 = 6! = 720$ nombres.

3. On tire avec ordre sans remise 4 jetons parmi 6.
   On peut former $A_6^4 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$ nombres.

4. On tire sans ordre 2 chiffres pairs parmi 3 et 3 chiffres impairs parmi 3.
   On peut former $C_3^2 \cdot C_3^3 = 3$ tirages contenant 2 chiffres pairs et 3 chiffres impairs.

5. On tire sans ordre 5 jetons parmi 6.
   On tire soit :
   3 chiffres pairs et 2 chiffres impairs :
   On les aligne alors de la manière « p i p i p » et on permute les 3 chiffres pairs et les 2 chiffres impairs : $C_3^3 \cdot C_3^2 \cdot 3! \cdot 2!$
   ou
   3 chiffres impairs et 2 chiffres pairs :
   On les aligne alors de la manière « i p i p i » et on permute les 3 chiffres impairs et les 2 chiffres pairs : $C_3^3 \cdot C_3^2 \cdot 3! \cdot 2!$
   Cela fait un total de $C_3^3 \cdot C_3^2 \cdot 3! \cdot 2! \cdot 2 = 72$ nombres.

   Autre méthode :
   On tire 5 chiffres parmi les 6 chiffres (ce qui correspond à 3 chiffres pairs et 2 chiffres impairs ou bien à 3 chiffres impairs et 2 chiffres pairs) qu'on place alternativement
   (p i p i p ou i p i p i) et on permute les 3 chiffres pairs (ou impairs) et les 2 chiffres impairs (ou pairs) : $C_6^5 \cdot 3! \cdot 2! = 72$

6. On tire avec ordre avec remise 8 jetons parmi 6.
   tous les tirages moins tirages sans $\boxed{6}$ moins tirages avec un jeton $\boxed{6}$
   $$6^8 - 5^8 - 1 \cdot 5^7 \cdot \underbrace{8}_{\substack{\text{place du} \\ \text{jeton } \boxed{6}}} = 663991 \text{ tirages}$$

7. Il faut permuter les 9 jetons et diviser par le nombre de permutations de 4 car il y a 4 jetons identiques $\boxed{1}$: $9! : 4! = 15120$