LE GOUVERNEMENT
DU GRAND-DUCHÉ DE LUXEMBOURG
Ministère de l'Éducation nationale,
de l'Enfance et de la Jeunesse

EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES CLASSIQUES
2021

BRANCHE	SECTION(S)	ÉPREUVE ÉCRITE	
Mathématiques I	**C**	*Durée de l'épreuve :*	*1 h 45 minutes*
		Date de l'épreuve :	*01/06/21*

Question 1 (12 + (7 + 3) = 22 points)

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $3z^3-(8-9i)z^2+(9-23i)z-36-12i=0$ sachant qu'elle admet une solution imaginaire pure.

2. On donne les nombres complexes suivants :

   $z_1=\left(1+i\sqrt{3}\right)^2$; $z_2=2(1-i)$ et $Z=\dfrac{z_1}{z_2}$.

   a) Mettre z_1, z_2 et Z sous forme trigonométrique et sous forme algébrique.

   b) En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\dfrac{11\pi}{12}\right)$ et de $\sin\left(\dfrac{11\pi}{12}\right)$.

Question 2 (5 +(1+6) = 12 points)

1. Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite d passant par le point P(2, 3, 5) et parallèle à l'intersection des plans d'équation $3x-y+z=0$ et $x-y+z=0$.

2. On donne les cinq points $A(-1;2;6)$, $B(5;-7;-4)$, $C(2;-3;5)$, $D(4;6;-1)$ et $E(3;-4;2)$.

   a) Vérifier que les points C, D et E ne sont pas alignés.

   b) Déterminer l'intersection de la droite (AB) avec le plan (CDE).

Question 3 (10 points)

1. Déterminer les valeurs du paramètre réel m pour lesquelles le système suivant admet une solution unique : $\begin{cases} x+my+2z=m \\ -2x+y+(m-2)z=1 \\ mx+y+2z=2m-1 \end{cases}$ avec $m\in\mathbb{R}$

2. Résoudre le système ci-dessus pour $m=0$ et pour $m=1$ et interpréter les résultats géométriquement.

Question 4 (1 + 1 + 1 + 2 + 4 + 4 + 3 = 16 points)

Une urne contient les 6 jetons suivants : $\left\{\boxed{1},\boxed{2},\boxed{3},\boxed{4},\boxed{5},\boxed{6}\right\}$.

1. On tire simultanément 4 jetons. Combien de tirages différents peut-on former ?
2. On tire successivement sans remise 6 jetons et on les aligne. Combien de nombres différents formés de 6 chiffres peut-on ainsi former ?
3. On tire successivement sans remise 4 jetons et on les aligne. Combien de nombres différents formés de 4 chiffres peut-on ainsi former ?
4. On tire simultanément 5 jetons. Combien de tirages différents contenant 2 chiffres pairs et 3 chiffres impairs peut-on former ?
5. On tire simultanément 5 jetons. Combien de nombres différents peut-on former si on les aligne de manière à ce que 2 chiffres pairs soient toujours séparés par un chiffre impair (ou bien que 2 chiffres impairs soient toujours séparés par un chiffre pair) ?
6. On tire successivement avec remise 8 jetons. Combien de tirages différents contenant au moins 2 jetons $\boxed{6}$ peut-on former ?
7. On rajoute 3 jetons $\boxed{1}$ aux 6 jetons d'origine. Combien de nombres différents peut-on former en utilisant tous ces jetons ?

Examen de fin d'études secondaires — Sections B, C, D

Formules trigonométriques

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\cos^2 x = \dfrac{1}{1+\tan^2 x}$ $\qquad \sin^2 x = \dfrac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$ $\qquad 1+\tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

$\sin(\pi - x) = \sin x$ $\qquad \sin(\pi + x) = -\sin x$ $\qquad \sin(-x) = -\sin x$

$\cos(\pi - x) = -\cos x$ $\qquad \cos(\pi + x) = -\cos x$ $\qquad \cos(-x) = \cos x$

$\tan(\pi - x) = -\tan x$ $\qquad \tan(\pi + x) = \tan x$ $\qquad \tan(-x) = -\tan x$

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$ $\qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$ $\qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$

$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x$ $\qquad \tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\cot x$

$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x \sin y$

$\sin(x-y) = \sin x\cos y - \cos x \sin y$

$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x \sin y$

$\cos(x-y) = \cos x\cos y + \sin x \sin y$

$\tan(x+y) = \dfrac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$

$\tan(x-y) = \dfrac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$

$\sin 2x = 2\sin x \cos x$ $\qquad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ $\qquad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$

$\sin 2x = \dfrac{2\tan x}{1+\tan^2 x}$ $\qquad \cos 2x = \dfrac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$ $\qquad \tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$

$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$ $\qquad \cos 3x = -3\cos x + 4\cos^3 x$

$\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$

$\sin p - \sin q = 2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}$

$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$

$\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$

$\tan p + \tan q = \dfrac{\sin(p+q)}{\cos p \cos q}$

$\tan p - \tan q = \dfrac{\sin(p-q)}{\cos p \cos q}$

$\sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$

$\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$

$\sin x \sin y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]$