LE GOUVERNEMENT
DU GRAND-DUCHÉ DE LUXEMBOURG
Ministère de l'Éducation nationale,
de l'Enfance et de la Jeunesse

# EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES CLASSIQUES
# 2021
# CORRIGÉ – BARÈME

| BRANCHE | SECTION(S) | ÉPREUVE ÉCRITE | |
|---|---|---|---|
| **Mathématiques I** | **D, E-MATHF** | *Durée de l'épreuve :* | *1 h 45 min* |
| | | *Date de l'épreuve :* | *01/06/2021* |

**Question 1** **(10 points)**

Soit $z_0 = bi$ $(b \in \mathbb{R})$ une racine imaginaire pure de $P$.

$$P(bi) = 0 \Leftrightarrow (bi)^3 + (-1-i)(bi)^2 + 39bi - 49 - 119i = 0$$
$$\Leftrightarrow -b^3i + b^2 + b^2i + 39bi - 49 - 119i = 0$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -b^3 + b^2 + 39b - 119 = 0 & (pi) \\ b^2 - 49 = 0 & (pr) \end{cases}$$

$b^2 - 49 = 0 \Leftrightarrow b = -7 \; ou \; b = 7$

$Si\; b = -7\; alors\; -b^3 + b^2 + 39b - 119 = 343 + 49 - 273 - 119 = 0.$
$Si\; b = 7\; alors\; -b^3 + b^2 + 39b - 119 = -343 + 49 + 273 - 119 = -140 \neq 0.$

La racine imaginaire pure de $P$ est $z_0 = -7i$.

$P(z)\; est\; divisible\; par\; z - (-7i) = z + 7i.$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | $1$ | $-1-i$ | $39$ | $-49-119i$ |
| $-7i$ | | $-7i$ | $-56+7i$ | $49+119i$ |
| | $1$ | $-1-8i$ | $-17+7i$ | $0$ |

$P(z) = 0 \Leftrightarrow z = -7i \; ou \; z^2 + (-1-8i)z - 17 + 7i = 0$

Résolvons $z^2 + (-1-8i)z - 17 + 7i = 0$

$\Delta = (-1-8i)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-17+7i) = 1 - 64 + 16i + 68 - 28i = 5 - 12i$

Soit $\delta = x + yi \; (x, y \in \mathbb{R})\; une\; racine\; carrée\; complexe\; de\; 5 - 12i.$

Alors $\begin{cases} x^2 + y^2 = |5 - 12i| = \sqrt{25 + 144} = 13 & (1) \\ x^2 - y^2 = 5 & (2) \\ 2xy = -12 < 0 & (3) \end{cases}$

$(1) + (2) \Rightarrow x = \pm 3$; $(1) - (2) \Rightarrow y = \pm 2$; de (3), $x\; et\; y\; sont\; de\; signe\; contraire$

$\delta_1 = 3 - 2i\, ; \delta_2 = -3 + 2i$

$$z^2 + (-1-8i)z - 17 + 7i = 0$$
$$\Leftrightarrow z = \frac{1 + 8i + 3 - 2i}{2} \; ou \; z = \frac{1 + 8i - 3 + 2i}{2}$$
$$\Leftrightarrow z = 2 + 3i \; ou \; z = -1 + 5i$$

$S = \{-7i; 2 + 3i; -1 + 5i\}$





**Question 2** **(7 + 8 + 5 = 20 points)**

1) Posons $z_1 = -1 + \sqrt{3}i$

$|z_1| = \sqrt{1 + 3} = 2$

$$\begin{cases} cos\theta_1 = -\frac{1}{2} < 0 \\ sin\theta_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \theta_1 = \frac{2\pi}{3} \; [2\pi] \; donc \; z_1 = 2cis\frac{2\pi}{3}$$

Posons $z_2 = 4 - 4i$

$|z_2| = \sqrt{16 + 16} = 4\sqrt{2}$

$$\begin{cases} cos\theta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} > 0 \\ sin\theta_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \theta_2 = -\frac{\pi}{4} \; [2\pi] \; donc \; z_2 = 4\sqrt{2}cis\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

Alors :

$$z = \frac{\left[2cis\frac{2\pi}{3}\right]^{12}}{\left[4\sqrt{2}cis\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]^6}$$

$$= \frac{2^{12}cis(8\pi)}{4^6 \cdot 2^3 cis\left(-\frac{3\pi}{2}\right)}$$

$$= \frac{1}{2^3} \cdot cis\left(\frac{19\pi}{2}\right)$$

$= \frac{1}{8} \cdot cis\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ forme trigonométrique de $z$

$= \frac{1}{8} \cdot (-i) = -\frac{1}{8}i$ forme algébrique de $z$

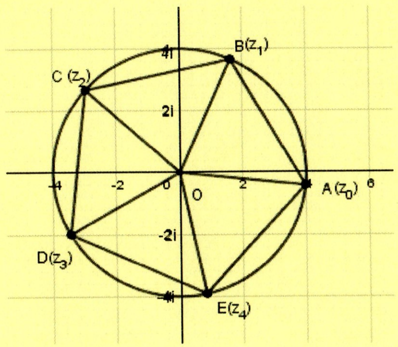
2) $|Z| = \sqrt{786432 + 262144} = \sqrt{1048576} = 1024$

$$\begin{cases} cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} > 0 \\ sin\theta = -\frac{1}{2} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \theta = -\frac{\pi}{6} \; [2\pi] \; donc \; Z = 1024cis\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

On doit résoudre l'équation $z^5 = Z \Leftrightarrow z_k = 4cis\left(-\frac{\pi}{30} + k \cdot \frac{2\Pi}{5}\right) \; avec \; k \in \{0;1;2;3;4\}$

$z_0 = 4cis\left(-\frac{\pi}{30}\right)$ ; $z_1 = 4cis\left(\frac{11\pi}{30}\right)$ ; $z_2 = 4cis\left(\frac{23\pi}{30}\right)$ ; $z_3 = 4cis\left(\frac{7\pi}{6}\right)$ ; $z_4 = 4cis\left(\frac{47\pi}{30}\right)$.

$-\frac{\pi}{30}\; radians\; correspondent\; à\; -6°\; et\; \frac{2\pi}{5}\; radians\; correspondent\; à\; 72°\; on\; obtient\; alors:$




3)

$$z=\frac{2+2\sqrt{2}-2i}{1+\sqrt{2}+i}=\frac{(2+2\sqrt{2}-2i)(1+\sqrt{2}-i)}{[(1+\sqrt{2})+i][(1+\sqrt{2})-i]}=\frac{2+2\sqrt{2}-2i+2\sqrt{2}+4-2\sqrt{2}i-2i-2\sqrt{2}i-2}{1+2\sqrt{2}+2+1}$$

$$=\frac{4+4\sqrt{2}-4i-4\sqrt{2}i}{4+2\sqrt{2}}=\frac{2(2+2\sqrt{2}-2i-2\sqrt{2}i)}{2(2+\sqrt{2})}=\frac{2+2\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}-\frac{2+2\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}i=\frac{2+2\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}(1-i)$$

$$=\frac{(2+2\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}(1-i)=\frac{4-2\sqrt{2}+4\sqrt{2}-4}{4-2}(1-i)=\sqrt{2}(1-i)=\sqrt{2}-\sqrt{2}i$$

**Question 3** **(3 + 3 + 3 + 3 = 12 points)**

1) $detA=\begin{vmatrix} 2 & m-1 & 2 \\ -1 & m & 1 \\ m+1 & -1 & 3 \end{vmatrix}$

$= 6m+(m-1)(m+1)+2-2m(m+1)+2+3(m-1)$
$= 6m+m^2-1+2-2m^2-2m+2+3m-3$
$= -m^2+7m$

On a : $-m^2+7m=0 \Leftrightarrow m=0 \; ou \; m=7$
$(S)$ admet une solution unique $\Leftrightarrow detA\neq 0 \Leftrightarrow m\in\mathbb{R}^*-\{7\}$

2) Si $m=8$, alors le système admet une solution unique.

$detA=-8^2+7\cdot 8=-64+56=-8$

$detA_x=\begin{vmatrix} 8 & 7 & 2 \\ -1 & 8 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix}=192-7+2+16+8+21=232$

$detA_y=\begin{vmatrix} 2 & 8 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 9 & -1 & 3 \end{vmatrix}=-6+72+2+18+2+24=112$

$detA_z=\begin{vmatrix} 2 & 7 & 8 \\ -1 & 8 & -1 \\ 9 & -1 & -1 \end{vmatrix}=-16-63+8-576-2-7=-656$





$$S=\left\{\left(\frac{232}{-8};\frac{112}{-8};\frac{-656}{-8}\right)\right\}=\{(-29;-14;82)\}$$

Interprétation géométrique : Les équations du système sont celles de trois plans de l'espace dont l'intersection est le point $B(-29;-14;82)$.

3) Si $m=0$

alors $(S)\Leftrightarrow\begin{cases} 2x-y+2z=0 \\ -x \quad +z=-1 \\ x-y+3z=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y+2z=0 \\ -x+z=-1 \\ x-z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y+2z=0 \\ x-z=1 \\ x-z=1 \end{cases}$

$(E_3)/[(E_1)-(E_3)]$ $\quad (E_2)/[-1\cdot(E_2)]$

Le système est simplement indéterminé, posons $z=k \; avec \; k\in\mathbb{R}$,

alors $(S)\Leftrightarrow\begin{cases} x=k+1 \\ y=4k+2 \\ z=\;k \end{cases}$ et $\quad S=\{(k+1;4k+2;k)/k\in\mathbb{R}\}$

Interprétation géométrique : Les équations du système sont celles de trois plans de l'espace dont l'intersection est la droite passant par le point $C(1;2;0)$ et admettant le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix}$ comme vecteur directeur.

4) Si $m=7$

alors $(S)\Leftrightarrow\begin{cases} 2x+6y+2z=7 \\ -x+7y+z=-1 \\ 8x-y+3z=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+6y+2z=7 \\ 20y+4z=5 \\ 25y+5z=29 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+6y+2z=7 \\ 5y+z=\frac{5}{4} \\ 5y+z=\frac{29}{5} \end{cases}$

$(E_2)/[(E_1)+2\cdot(E_2)]$ $\quad (E_2)/\left[\frac{1}{4}\cdot(E_2)\right]$
$(E_3)/[4\cdot(E_1)-(E_3)]$ $\quad (E_3)/\left[\frac{1}{5}\cdot(E_3)\right]$

Le système est impossible et $S=\emptyset$.
Interprétation géométrique : Les équations du système sont celles de trois plan de l'espace dont l'intersection est vide.

**Question 4** **(4 + 4 + 3 + 1 + 2 + 2 + 2 = 18 points)**

1) $M(x;y;z)\in\pi_3 \Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=0$

$\Leftrightarrow\begin{vmatrix} x-2 & -6 & -1 \\ y+1 & 4 & 3 \\ z-3 & -4 & 1 \end{vmatrix}=0$

$\Leftrightarrow 4(x-2)-18(z-3)+4(y+1)+4(z-3)+12(x-2)+6(y+1)=0$
$\Leftrightarrow 4x-8-18z+54+4y+4+4z-12+12x-24+6y+6=0$
$\Leftrightarrow$8x+5y-7z+10=0

$\pi_3\equiv 8x+5y-7z+10=0$

2) Puisque $d\perp\pi_3$ *le vecteur* $\vec{n}\begin{pmatrix}8\\5\\-7\end{pmatrix}$, *vecteur normal à* $\pi_3$ *est un vecteur directeur de d.*

$M(x;y;z) \in d \Leftrightarrow Il\ existe\ k \in \mathbb{R}\ tel\ que\ \overrightarrow{EM} = k \cdot \vec{n}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-9=8k \\ y-0=5k \\ z+8=-7k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=9+8k \\ y=5k \\ z=-8-7k \end{cases} avec\ k \in \mathbb{R}$$

système d'équations paramétriques de $d$

$$\begin{cases} x=9+8k \\ y=5k \\ z=-8-7k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=\frac{y}{5} \\ x=9+\frac{8y}{5} \\ z=-8-\frac{7y}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=\frac{y}{5} \\ 5x=45+8y \\ 5z=-40-7y \end{cases} \Rightarrow d \equiv \begin{cases} 5x-8y-45=0 \\ 7y+5z+40=0 \end{cases}$$

système d'équations cartésiennes de $d$

3) $D(x;y;z) \in \pi_3 \cap d \Leftrightarrow \begin{cases} 8x+5y-7z+10=0 \\ x=9+8k \\ y=5k \\ z=-8-7k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 72+64k+25k+56+49k+10=0 \\ x=9+8k \\ y=5k \\ z=-8-7k \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k=-1 \\ x=1 \\ y=-5 \\ z=-1 \end{cases} \quad D(1;-5;-1)$$

4) $F(3;1;2) \in \pi_2 \Leftrightarrow 6+1-2=3 \Leftrightarrow 5=3$ *Impossible*

$F \notin \pi_2$

5) $\pi_4 \parallel \pi_2 \Rightarrow \pi_4 \equiv 2x+y-z=d$
$F(3;1;2) \in \pi_4 \Leftrightarrow 6+1-2=d \Leftrightarrow d=5$
$\pi_4 \equiv 2x+y-z-5=0$

6) $4x-y+2=0$
Cette équation est doublement indéterminée.
Posons $z=k\ avec\ k \in \mathbb{R}\ et\ x=h\ avec\ h \in \mathbb{R}\ alors$

$$4x-y+2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=h \\ y=4h+2 \\ z=k \end{cases} avec\ k \in \mathbb{R}\ et\ h \in \mathbb{R}$$

$\vec{u}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\4\\0\end{pmatrix}$ sont par exemple deux vecteurs directeurs non colinéaires de $\pi_1$.

7) $G(-15;y;z) \in d \Leftrightarrow \begin{cases} -75-8y-45=0 \\ 7y+5z+40=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-15 \\ -105+5z+40=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-15 \\ z=13 \end{cases}$
$G(-15;-15;13)$.