LE GOUVERNEMENT
DU GRAND-DUCHÉ DE LUXEMBOURG
Ministère de l'Éducation nationale,
de l'Enfance et de la Jeunesse

EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES CLASSIQUES
2021
CORRIGÉ – BARÈME

BRANCHE	SECTION(S)	ÉPREUVE ÉCRITE
Mathématiques	E,F,G	*Durée de l'épreuve :* 2 heures *Date de l'épreuve :* 01/06/21

Partie I : Systèmes d'équations et d'inéquations (21 points)

Question 1 (8 points)

$$\begin{cases} \frac{x-1}{2}-\frac{x-1+z-y}{5}+\frac{z}{10}=0 \\ 5y=2(2+x+2y)-3(z+1) \\ 4x-2y=-2+6z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5(x-1)-2(x-1+z-y)+z=0 \\ 5y=4+2x+4y-3z-3 \\ 2x-y-3z=-1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x-5-2x+2-2z+2y+z=0 \\ -2x+y+3z=1 \\ 2x-y-3z=-1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x+2y-z=3 & (1) \\ -2x+y+3z=1 & (2) \\ 2x-y-3z=-1 & (3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x+2y-z=3 & (1) \\ 7x-7z=1 & (1)-2\cdot(2)\to(2') \\ 0=0 & (2)+(3)\to(3') \end{cases}$$

Le système est simplement indéterminé et admet une infinité de solutions.

On pose $x=r$ avec $r\in\mathbb{R}$ et on obtient :

dans (2') : $7r-7z=1 \Leftrightarrow z=-\frac{1}{7}+r$

On remplace dans (1) : $3r+2y-\left(-\frac{1}{7}+r\right)=3 \Leftrightarrow 3r+2y+\frac{1}{7}-r=3$

$$\Leftrightarrow 2y=\frac{20}{7}-2r$$

$$\Leftrightarrow y=\frac{10}{7}-r$$

$$S=\left\{\left(r;\frac{10}{7}-r;\ -\frac{1}{7}+r\right):r\in\mathbb{R}\right\}$$

ou $S=\left\{\left(\frac{1}{7}+r;\frac{9}{7}-r;\ r\right):r\in\mathbb{R}\right\}$ ou $S=\left\{\left(\frac{10}{7}-r;\ r;\frac{9}{7}-r\right):r\in\mathbb{R}\right\}$

Question 2 (13 points)

On pose : x = nombre de minibus
y = nombre de cars

Il faut résoudre graphiquement le système d'inéquations suivantes : $\begin{cases} 0\le x\le 7 \\ 0\le y\le 9 \\ x+6y\ge 40 \\ 20x+40y\ge 320 \end{cases}$

(d_1) : $x+6y=40$

$\Leftrightarrow 6y=-x+40$

$\Leftrightarrow y=-\frac{1}{6}x+\frac{40}{6}$

$\Leftrightarrow y=-\frac{1}{6}x+\frac{20}{3}$

$f_1(x,y)=x+6y$

(d_2) : $20x+40y=320$

$\Leftrightarrow 40y=-20x+320$

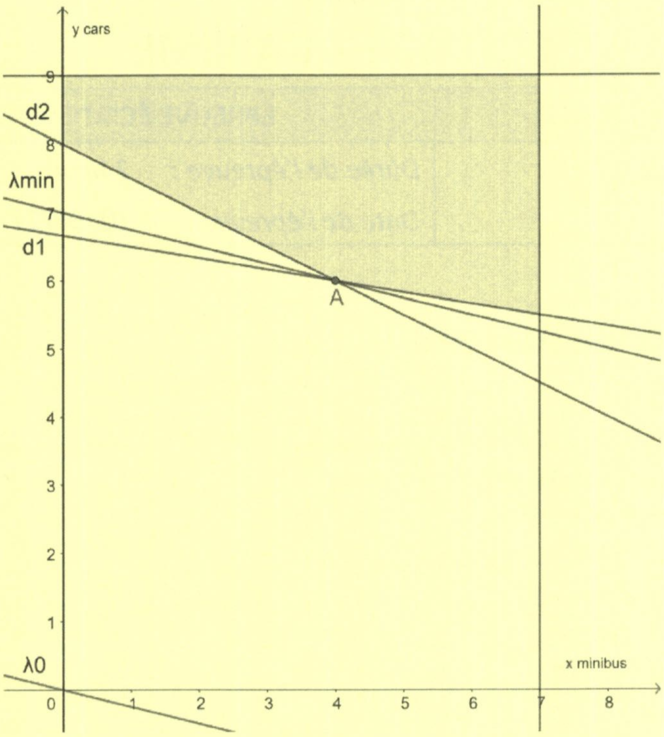
$\Leftrightarrow y=-\frac{20}{40}x+\frac{320}{40}$

$\Leftrightarrow y=-\frac{1}{2}x+8$

$f_2(x,y)=20x+40y$

$f_1(0{,}0) = 0 \not\geq 40 \Rightarrow O(0{,}0)$ n'est pas solution | $f_2(0{,}0) = 0 \not\geq 320 \Rightarrow O(0{,}0)$ n'est pas solution

Le prix de location est donné par $\mathrm{L}(x, y) = 170x + 680y$.



On pose (λ_0) : $170x + 680y = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{170}{680}x$

$\Leftrightarrow y = -\frac{1}{4}x$

La droite (λ_{min}) parallèle à (λ_0) qui a au moins un point commun avec le polygone des contraintes et qui est le plus proche de l'origine

passe par A $\in (d_1) \cap (d_2)$:

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{6}x + \frac{20}{3} & (1) \\ y = -\frac{1}{2}x + 8 & (2) \end{cases}$$

(1) dans (2): $-\frac{1}{6}x + \frac{20}{3} = -\frac{1}{2}x + 8 \quad | \cdot 6$

$\Leftrightarrow -x + 40 = -3x + 48$

$\Leftrightarrow 2x = 8$

$\Leftrightarrow x = 4 \quad (3)$

(3) dans (2): $y = -2 + 8 = 6$

Donc : A$(4; 6)$

Ainsi le prix de location minimal est :

$\mathrm{L}(4; 6) = 170 \cdot 4 + 680 \cdot 6 = 4760$ €

L'organisateur doit prévoir 4 minibus et 6 cars pour minimiser le budget au montant de 4760 €.

Partie II : Analyse (25 points)

<u>Question 3</u> (3 + 3 = 6 points)

a) $\frac{8}{4^{1+3x}} = 0{,}5 \Leftrightarrow 8 = 0{,}5 \cdot 4^{1+3x}$

$\Leftrightarrow \frac{8}{0{,}5} = 4^{1+3x}$

$\Leftrightarrow 16 = 4^{1+3x}$

$\Leftrightarrow 4^2 = 4^{1+3x}$

$\Leftrightarrow 2 = 1 + 3x$

$\Leftrightarrow 3x = 1$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$

$S = \left\{\frac{1}{3}\right\}$

b) $12 - 3\log_2(6 - 3x) = \log_2(6 - 3x)$ avec $x \in]-\infty; 2[$

$\Leftrightarrow -4\log_2(6 - 3x) = -12$

$\Leftrightarrow \log_2(6 - 3x) = 3$

$\Leftrightarrow 6 - 3x = 2^3$

$\Leftrightarrow -3x = 8 - 6$

$\Leftrightarrow x = -\frac{2}{3}$

$S = \left\{-\frac{2}{3}\right\}$

<u>Question 4</u> (5 points)

$f(x) = \frac{4}{2-x}$

$f(3+h) = \frac{4}{2-(3+h)} = \frac{4}{2-3-h} = \frac{4}{-1-h}$

$f(3) = \frac{4}{2-3} = -4$

$$\frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \frac{\frac{4}{-1-h} - (-4)}{h} = \frac{\frac{4}{-1-h} + 4 \cdot \frac{-1-h}{-1-h}}{h} = \frac{4 - 4 - 4h}{(-1-h) \cdot h} = \frac{-4h}{(-1-h) \cdot h} = \frac{-4}{-1-h}$$

Pour $h = 0$, on obtient $f'(3) = \frac{-4}{-1-0} = 4$.

Question 5 (5 + 4 + 5 = 14 points)

a) $f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 3x^2 - 6x + 5$ $\qquad$ $D_f = \mathbb{R} = D_{f'}$

$f'(x) = -\frac{1}{2} \cdot 3x^2 + 3 \cdot 2x - 6 = -\frac{3}{2}x^2 + 6x - 6$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{2}x^2 + 6x - 6 = 0$

$\Delta = 6^2 - 4 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot (-6) = 36 - 36 = 0$

$x_0 = \frac{-6}{-3} = 2$

Tabl. de var.:

x	$-\infty$ $\qquad$ 2 $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$ $\quad$ 0 $\quad$ $-$
$f(x)$	$\searrow$ $\quad$ 1 $\quad$ $\searrow$

$f(2) = -\frac{1}{2} \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^2 - 6 \cdot 2 + 5 = 1$

b) $f''(x) = -\frac{3}{2} \cdot 2x + 6 = -3x + 6$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -3x + 6 = 0$

$\Leftrightarrow -3x = -6$

$\Leftrightarrow x = \frac{6}{3} = 2$

point d'inflexion $\mathrm{I}(2; 1)$

Tabl. de concavité :

x	$-\infty$ $\qquad$ 2 $\qquad$ $+\infty$
$f''(x)$	$+$ $\quad$ 0 $\quad$ $-$
Courbe	$\cup$ $\quad$ I $\quad$ $\cap$

c) Une tangente à la courbe est parallèle à la droite d: $y = -6x + 4$, si sa pente est égale à la pente de d.

$f'(a) = -6 \Leftrightarrow -\frac{3}{2}a^2 + 6a - 6 = -6$

$\Leftrightarrow -\frac{3}{2}a^2 + 6a = 0$

$\Leftrightarrow a \cdot \left(-\frac{3}{2}a + 6\right) = 0$

$\Leftrightarrow a = 0$ ou $-\frac{3}{2}a + 6 = 0$

$\Leftrightarrow -\frac{3}{2}a = -6$

$\Leftrightarrow a = 6 \cdot \frac{2}{3}$

$\Leftrightarrow a = 4$

Il existe deux tangentes à la courbe parallèles à la droite d.

$f(4) = -\frac{1}{2} \cdot 4^3 + 3 \cdot 4^2 - 6 \cdot 4 + 5 = -3$ $\qquad$ $\mathrm{A}(4; -3)$

$f(0) = 5$ $\qquad$ $\mathrm{B}(0; 5)$

Partie III : Probabilités (14 points)

Question 6 (4 + 3 = 7 points)

$p(A) = \frac{552}{1200} = \frac{23}{50} = 0{,}46$

$p(B) = \frac{24}{1200} = \frac{1}{50} = 0{,}02$

$p(C) = \frac{300}{720} = \frac{5}{12} \cong 0{,}417$

	D	M	T	Total
Hommes	24	276	180	480
Femmes	144	276	300	720
Total	168	552	480	1200

Question 7 (7 points)

a) $p(F\ et\ \bar{C}) = 0{,}6 \cdot 0{,}05 = 0{,}030$

b) $p(\bar{C}) = 0{,}4 \cdot 0{,}92 + 0{,}6 \cdot 0{,}05$
$= 0{,}368 + 0{,}030$
$= 0{,}398$

c) $p(\bar{C}\ si\ H) = 0{,}920$

d) $p(H\ si\ \bar{C}) = \frac{p(H\ et\ \bar{C})}{p(\bar{C})} = \frac{0{,}4 \cdot 0{,}92}{0{,}398} = \frac{0{,}368}{0{,}398} \cong 0{,}925$