LE GOUVERNEMENT DU GRAND-DUCHÉ DE LUXEMBOURG Ministère de l'Éducation nationale, de l'Enfance et de la Jeunesse	EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES CLASSIQUES **2021** **CORRIGÉ – BARÈME**	
BRANCHE	**SECTION(S)**	**ÉPREUVE ÉCRITE**
Mathématiques 2	**C, D**	*Durée de l'épreuve : 2h45* *Date de l'épreuve : 8 juin 2021*

Question 1 *(4+4+4+2+3=17P)*

1) $f(x) = \frac{e^x}{(1+x)^2} - 3$

- dom $f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
- $\lim\limits_{x\to-1} \left(\underbrace{\frac{\overbrace{e^x}^{\to e^{-1}}}{\underbrace{(1+x)^2}_{\to 0^+}}}_{\to+\infty} - 3 \right) = +\infty$ A.V. : $x = -1$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\underbrace{\frac{\overbrace{e^x}^{\to 0}}{\underbrace{(1+x)^2}_{\to +\infty}}}_{\to 0} - 3 \right) = -3$ A.H. à gauche : $y = -3$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\underbrace{\frac{e^x}{(1+x)^2}}_{\to+\infty} - 3 \right) = +\infty$ pas d'A.H. à droite

Calcul à part :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{(1+x)^2} \begin{matrix} \to +\infty \\ \to +\infty \end{matrix} \text{ f.i.}$$
$$\overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2\cdot(1+x)} \begin{matrix} \to +\infty \\ \to +\infty \end{matrix} \text{ f.i.}$$
$$\overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2} \begin{matrix} \to +\infty \\ \to 2 \end{matrix}$$
$$= +\infty$$

2) dom $f' = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$\forall x \in$ dom f':

$$f'(x) = \frac{e^x(1+x)^2 - e^x\cdot 2\cdot(1+x)\cdot 1}{(1+x)^4} - 0 = \frac{e^x\cdot(1+x)\cdot(1+x-2)}{(1+x)^4} = \frac{e^x\cdot(x-1)}{(1+x)^3}$$

Abscisses des extrema éventuels : $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Signe : $f'(x) = \frac{e^x\cdot(x-1)}{(1+x)^3} = \frac{\overbrace{e^x}^{>0}\cdot(x-1)}{\underbrace{(1+x)^2}_{>0}\cdot(1+x)}$ donc $f'(x)$ a le même signe que $\frac{x-1}{1+x}$.

Tableau de variations :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-3	$\nearrow$	$+\infty \| +\infty$	$\searrow$	min	$\nearrow$	$+\infty$

Minimum : $f(1) = \frac{e}{(1+1)^2} - 3 = \frac{e}{4} - 3 \approx -2{,}32$

3) dom $f'' = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$\forall x \in$ dom f'':

$$f''(x) = \frac{(e^x(x-1)+e^x)\cdot(1+x)^3 - e^x\cdot(x-1)\cdot 3\cdot(1+x)^2}{(1+x)^6}$$
$$= \frac{e^x\cdot x\cdot(1+x)^3 - 3\cdot e^x\cdot(x-1)\cdot(1+x)^2}{(1+x)^6}$$
$$= \frac{e^x\cdot(1+x)^2\cdot(x+x^2-3x+3)}{(1+x)^6}$$
$$= \frac{e^x\cdot(x^2-2x+3)}{(1+x)^4}$$

Points d'inflexion éventuels :

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 3 = 0 \qquad \Delta = -8 < 0$

C_f n'admet donc pas de points d'inflexion.

Signe : $f''(x) = \dfrac{\overbrace{e^x}^{>0}\cdot\overbrace{(x^2-2x+3)}^{>0}}{\underbrace{(1+x)^4}_{>0}} > 0$

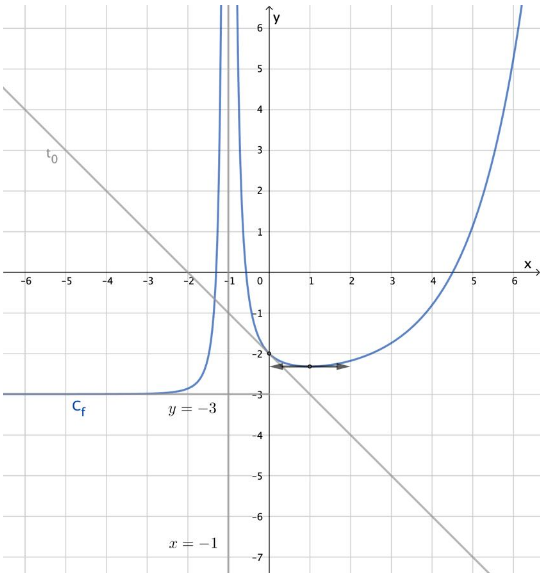
Tableau de concavité :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	$\|$	$+$	
C_f			$\|$		

4) $f(0) = \frac{1}{(1+0)^2} - 3 = -2 \qquad f'(0) = \frac{1\cdot(-1)}{(1+0)^3} = -1$

On a donc : $t_0 \equiv y = f'(0)(x-0) + f(0) \Leftrightarrow y = -x - 2$

5) Représentation graphique :



Question 2 *(3+4=7P)*

1) $16^{x^2} - 64 \cdot 0{,}25^{5x+3} > 0 \qquad D = \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow (4^2)^{x^2} - 4^3 \cdot (4^{-1})^{5x+3} > 0$

$\Leftrightarrow 4^{2x^2} - 4^3 \cdot 4^{-5x-3} > 0$

$\Leftrightarrow 4^{2x^2} > 4^{-5x}$ (exp$_4$ bij. strict. ↗)

$\Leftrightarrow 2x^2 > -5x$

$\Leftrightarrow 2x^2 + 5x > 0$

Résolvons :

$2x^2 + 5x = 0$

$\Leftrightarrow x(2x+5) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = -\frac{5}{2}$

T.d.s.

x	$-\infty$		$-\frac{5}{2}$		0		$+\infty$
$2x^2+5x$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Finalement : $S = \left]-\infty; -\frac{5}{2}\right[\cup \left]0; +\infty\right[$

2) $\log_3 x = \frac{1}{2} + \log_9(4x+15) \ (E)$

C.E. : $x > 0$ et $4x + 15 > 0 \Leftrightarrow x > 0$ et $x > -\frac{15}{4} \Leftrightarrow x > 0 \qquad D = \mathbb{R}_+^*$

$(E) \Leftrightarrow 2 \cdot \log_3 x = 1 + 2 \cdot \frac{\log_3(4x+15)}{2}$

$\Leftrightarrow \log_3 x^2 = \log_3 3 + \log_3(4x+15)$

$\Leftrightarrow \log_3 x^2 = \log_3(12x+45)$

$\Leftrightarrow x^2 = 12x + 45$

$\Leftrightarrow x^2 - 12x - 45 = 0 \qquad (\Delta = 324)$

$\Leftrightarrow x = \frac{12-18}{2}$ ou $x = \frac{12+18}{2}$

$\Leftrightarrow \underbrace{x = -3}_{\notin D}$ ou $\underbrace{x = 15}_{\in D}$

Finalement : $S = \{15\}$

Question 3 *(3+(2+3)=8P)*

1) $\int \frac{\sin x \cdot \cos x}{1+\cos^2 2x} dx$

$= \frac{1}{2} \cdot \int \frac{\sin 2x}{1+\cos^2 2x} dx$

$= -\frac{1}{4} \cdot \int \frac{-2 \cdot \sin 2x}{1+\cos^2 2x} dx$

$= -\frac{1}{4} \cdot \arctan(\cos 2x) + k \ (k \in \mathbb{R})$, sur $I \subset \mathbb{R}$

2) (a) Déterminons les réels a et b tels que pour tout $x \in \mathbb{R}^* \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$:

$f(x) = \frac{a}{2x} + \frac{b}{(3x-1)^2}$

$\Leftrightarrow \frac{9x^2+2x+1}{2x(3x-1)^2} = \frac{a}{2x} + \frac{b}{(3x-1)^2} \quad | \cdot \underbrace{2x(3x-1)^2}_{\neq 0}$

$\Leftrightarrow 9x^2 + 2x + 1 = a(3x-1)^2 + 2bx$

$\Leftrightarrow 9x^2 + 2x + 1 = 9ax^2 - 6ax + a + 2bx$

$\Leftrightarrow 9x^2 + 2x + 1 = 9ax^2 + (-6a + 2b)x + a$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9 = 9a \\ 2 = -6a + 2b \\ 1 = a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \end{cases}$$

Finalement : $f(x) = \frac{1}{2x} + \frac{4}{(3x-1)^2}$.

(b) Les primitives de f sont données par :

$$F(x) = \int f(x)\,dx$$
$$= \int \left(\frac{1}{2x} + \frac{4}{(3x-1)^2}\right) dx$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{x}dx + 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \int 3 \cdot (3x-1)^{-2}\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\ln|x| + \frac{4}{3} \cdot \frac{(3x-1)^{-1}}{-1} + k \ (k \in \mathbb{R})$$
$$= \frac{1}{2}\ln|x| - \frac{4}{9x-3} + k, \text{ sur } I \subset \mathbb{R}^* \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$$

On cherche k tel que :

$$F(-1) = \frac{1}{4}$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\ln|-1| - \frac{4}{9\cdot(-1)-3} + k = \frac{1}{4}$$
$$\Leftrightarrow 0 + \frac{1}{3} + k = \frac{1}{4}$$
$$\Leftrightarrow k = -\frac{1}{12}$$

Finalement, la primitive cherchée est définie par :

$F(x) = \frac{1}{2}\ln|x| - \frac{4}{9x-3} - \frac{1}{12} = \frac{1}{2}\ln(-x) - \frac{4}{9x-3} - \frac{1}{12}$, sur $I \subset]-\infty; 0[$.

Question 4

(4+4=8P)

1) Voir manuel EM66 p.86-87

2) $\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{10}} \arcsin(5x)\,dx$

$$= \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{10}} 1 \cdot \arcsin(5x)\,dx$$

IPP :

$u(x) = \arcsin(5x)$	$v'(x) = 1$
$u'(x) = \frac{5}{\sqrt{1-25x^2}}$	$v(x) = x$

$$= [x \cdot \arcsin(5x)]_0^{\frac{\sqrt{3}}{10}} - \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{10}} \frac{5x}{\sqrt{1-25x^2}}\,dx$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{10} \cdot \frac{\pi}{3} - 0 - \left(-\frac{1}{10}\right) \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{10}} (-50x) \cdot (1-25x^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx$$
$$= \frac{\sqrt{3}\pi}{30} + \frac{1}{10}\left[\frac{(1-25x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{10}}$$
$$= \frac{\sqrt{3}\pi}{30} + \frac{1}{5}\left[\sqrt{1-25x^2}\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{10}}$$
$$= \frac{\sqrt{3}\pi}{30} + \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{2} - 1\right)$$
$$= \frac{\sqrt{3}\pi}{30} - \frac{1}{10}$$
$$= \frac{1}{30} \cdot \left(\sqrt{3}\pi - 3\right)$$

Question 5 *(6+(1+2)=9P)*

$f(x) = x + \frac{8}{1+e^{2x}}$ dom $f = \mathbb{R}$

1) *Variante 1 :*

Formules de Cauchy :

- $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(1 + \overbrace{\frac{8}{\underbrace{x}_{\to-\infty} \cdot \underbrace{(1+e^{2x})}_{\to 1}}}^{\to 0}\right) = 1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) - 1\cdot x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{8}{\underbrace{1+e^{2x}}_{\to 1}} = 8$

  Le graphe de f admet la droite d'équation $\Delta_1 : y = x + 8$ comme A.O à gauche.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 + \overbrace{\frac{8}{\underbrace{x}_{\to+\infty} \cdot \underbrace{(1+e^{2x})}_{\to+\infty}}}^{\to 0}\right) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - 1\cdot x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{8}{\underbrace{1+e^{2x}}_{\to+\infty}} = 0$

  Le graphe de f admet la droite d'équation $\Delta_2 : y = x$ comme A.O. à droite.

Variante 2 :

- $f(x) - (x+8) = \frac{8}{1+e^{2x}} - 8 = \frac{-8e^{2x}}{1+e^{2x}}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\overbrace{-8e^{2x}}^{\to 0}}{\underbrace{1+e^{2x}}_{\to 1}} = 0$

  Le graphe de f admet la droite d'équation $\Delta_1 : y = x + 8$ comme A.O à gauche.
- $f(x) - x = \frac{8}{1+e^{2x}}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{8}{\underbrace{1+e^{2x}}_{\to+\infty}} = 0$

  Le graphe de f admet la droite d'équation $\Delta_2 : y = x$ comme A.O. à droite.

<u>Position de C_f par rapport aux asymptotes obliques</u>

- La position de C_f par rapport à Δ_1 est déterminée par le signe de $\delta_1(x) = f(x) - (x+8)$.

  Or, $\delta_1(x) = \frac{8}{1+e^{2x}} - 8 = \frac{\overbrace{-8e^{2x}}^{<0}}{\underbrace{1+e^{2x}}_{>0}} < 0$. C_f se trouve donc en-dessous de Δ_1.
- La position de C_f par rapport à Δ_2 est déterminée par le signe de $\delta_2(x) = f(x) - x$.

  Or, $\delta_2(x) = \frac{8}{1+e^{2x}} > 0$. C_f se trouve donc au-dessus de Δ_2.

2) (a) Pour tout réel x, $f(x) = x + \frac{8\cdot e^{-2x}}{(1+e^{2x})\cdot e^{-2x}} = x + \frac{8e^{-2x}}{e^{-2x}+e^{0}} = x + \frac{8e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$.

(b) $F(x) = \int f(x)\,dx$

$= \int \left(x + \frac{8e^{-2x}}{1+e^{-2x}}\right) dx$

$= \int x\,dx + 8 \cdot \frac{1}{-2} \int \frac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}} dx$

$= \frac{x^2}{2} - 4\ln(1+e^{-2x}) + k \ (k \in \mathbb{R})$, sur $\mathbb{R}$

Question 6 *(4+(2+2+3)=11P)*

1) $4\ln^2 x - 6\ln x^2 + 7 \leq 0\ (I)$

C.E. : $x > 0$ et $x^2 > 0 \Leftrightarrow x > 0$ $\quad D = \mathbb{R}_+^*$

$(I) \Leftrightarrow 4\ln^2 x - 12\ln x + 7 \leq 0\ (I_1)$

Posons $t = \ln x$. (I_1) s'écrit : $4t^2 - 12t + 7 \leq 0$

Résolvons :

$4t^2 - 12t + 7 = 0 \quad (\Delta = 32)$

$\Leftrightarrow t = \frac{12-4\sqrt{2}}{8}$ ou $t = \frac{12+4\sqrt{2}}{8}$

$\Leftrightarrow t = \frac{3-\sqrt{2}}{2}$ ou $t = \frac{3+\sqrt{2}}{2}$

T.d.s.

t	$-\infty$		$\frac{3-\sqrt{2}}{2}$		$\frac{3+\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
$4t^2 - 12t + 7$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$(I) \Leftrightarrow \frac{3-\sqrt{2}}{2} \leq t \leq \frac{3+\sqrt{2}}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{3-\sqrt{2}}{2} \leq \ln x \leq \frac{3+\sqrt{2}}{2}$

$\Leftrightarrow \ln e^{\frac{3-\sqrt{2}}{2}} \leq \ln x \leq \ln e^{\frac{3+\sqrt{2}}{2}}$

$\Leftrightarrow e^{\frac{3-\sqrt{2}}{2}} \leq x \leq e^{\frac{3+\sqrt{2}}{2}}$ (ln bij. strict. ↗)

$S = \left[e^{\frac{3-\sqrt{2}}{2}} ; e^{\frac{3+\sqrt{2}}{2}}\right]$

2) (a) $f(x) = 4\ln^2 x - 12\ln x + 7$ $\quad$ dom $f = \mathbb{R}_+^*$

D'après 1), on a :

x	0		$e^{\frac{3-\sqrt{2}}{2}}$		$e^{\frac{3+\sqrt{2}}{2}}$		$+\infty$
$f(x)$	$\|$	$+$	0	$-$	0	$+$	

(b) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$F'(x) = 1 \cdot (4\ln^2 x - 20\ln x + 27) + x \cdot \left(4 \cdot 2 \cdot \ln x \cdot \frac{1}{x} - 20 \cdot \frac{1}{x}\right).$$
$$= 4\ln^2 x - 20\ln x + 27 + 8\ln x - 20$$
$$= 4\ln^2 x - 12\ln x + 7$$
$$= f(x)$$

Donc F est une primitive de f sur $\mathbb{R}_+^*$.

(c) Sur $[e; e^2]$, C_f se situe en-dessous de l'axe des abscisses.

$$A = -\int_e^{e^2} f(x)\,dx$$
$$= \int_{e^2}^{e} f(x)\,dx$$
$$= [F(x)]_{e^2}^{e}$$
$$= F(e) - F(e^2)$$
$$= e \cdot (4 - 20 + 27) - e^2 \cdot (16 - 40 + 27)$$
$$= 11e - 3e^2$$
$$\approx 7{,}73 \text{ u.a.}$$