LE GOUVERNEMENT
DU GRAND-DUCHÉ DE LUXEMBOURG
Ministère de l'Éducation nationale,
de l'Enfance et de la Jeunesse

EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES CLASSIQUES
2021

BRANCHE	SECTION(S)	ÉPREUVE ÉCRITE
Mathématiques 2	**C, D**	*Durée de l'épreuve : 2h45* *Date de l'épreuve : 8 juin 2021*

Question 1 *(4+4+4+2+3=17P)*

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \frac{e^x}{(1+x)^2} - 3$$

et soit C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.

1) Déterminer le domaine de définition de f et étudier l'existence d'asymptotes verticales et horizontales éventuelles.
2) Montrer que $f'(x) = \frac{e^x(x-1)}{(1+x)^3}$ et en déduire les variations de f. On donnera la valeur arrondie au centième près des extrema éventuels.
3) Calculer la dérivée seconde de f, étudier la concavité de C_f et préciser les coordonnées des points d'inflexion éventuels.
4) Établir une équation de la tangente t_0 à C_f au point d'abscisse 0.
5) Tracer C_f ainsi que t_0 dans un repère orthonormé du plan (unité 1 cm).

Question 2 *(3+4=7P)*

1) Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'inéquation suivante : $16^{x^2} - 64 \cdot 0{,}25^{5x+3} > 0$.
2) Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation suivante : $\log_3 x = \frac{1}{2} + \log_9(4x+15)$.

Question 3 *(3+(2+3)=8P)*

1) Calculer

$$\int \frac{\sin x \cdot \cos x}{1+\cos^2 2x}\, dx \text{ sur } \mathrm{I} \subset \mathbb{R}.$$

2) (a) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^* \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$ par

$$f(x) = \frac{9x^2+2x+1}{2x(3x-1)^2}.$$

Déterminer les réels a et b tels que

$$f(x) = \frac{a}{2x} + \frac{b}{(3x-1)^2}.$$

(b) En déduire, sur un intervalle I à préciser, la primitive F de f qui prend la valeur $\frac{1}{4}$ pour $x = -1$.

Question 4 *(4+4=8P)*

1) Démontrer le théorème suivant :
   Si f est continue sur $[a\,;b]$ et F est une primitive de f sur $[a\,;b]$,
   alors, pour tout x de $[a\,;b]$, $\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$.
   En particulier : $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$, noté $[F(t)]_a^b$.
2) Calculer la valeur exacte de l’intégrale définie suivante :

$$\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{10}} \arcsin(5x)\,dx.$$

Question 5 *(6+(1+2)=9P)*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x + \frac{8}{1+e^{2x}}$$

et soit C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.

1) Démontrer que le graphe de f admet des asymptotes obliques et étudier la position de C_f par rapport à celles-ci.
2) (a) Montrer que pour tout réel x, $f(x) = x + \frac{8e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$.
   (b) En déduire les primitives de f sur $\mathbb{R}$.

Question 6 *(4+(2+2+3)=11P)*

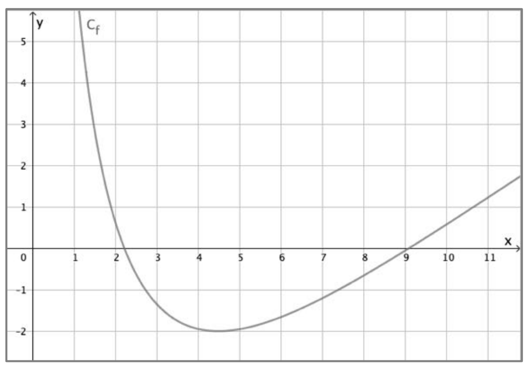
1) Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l’inéquation suivante :

$$4\ln^2 x - 6\ln x^2 + 7 \leq 0.$$

2) f est la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$f(x) = 4\ln^2 x - 12\ln x + 7.$$

   (a) Utiliser le point 1) pour étudier le signe de $f(x)$.
   (b) Soit $F(x) = x \cdot (4\ln^2 x - 20\ln x + 27)$.
   Vérifier que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (c) Calculer l’aire de la partie du plan délimitée par le graphe de f, l’axe des abscisses et les droites d’équation $x = e$ et $x = e^2$. Pour le calcul d’aire, vous pouvez si nécessaire utiliser les informations de la figure.



Formules trigonométriques

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$		
$\cos^2 x = \dfrac{1}{1+\tan^2 x}$	$\sin^2 x = \dfrac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$	$1+\tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
$\sin(\pi - x) = \sin x$	$\sin(\pi + x) = -\sin x$	$\sin(-x) = -\sin x$
$\cos(\pi - x) = -\cos x$	$\cos(\pi + x) = -\cos x$	$\cos(-x) = \cos x$
$\tan(\pi - x) = -\tan x$	$\tan(\pi + x) = \tan x$	$\tan(-x) = -\tan x$
$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$	
$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$	
$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x$	$\tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\cot x$	
$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$		$\tan(x+y) = \dfrac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$
$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$		
$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$		$\tan(x-y) = \dfrac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$
$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$		
$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$	$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$	
$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$	$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$	
$\sin 2x = \dfrac{2\tan x}{1+\tan^2 x}$	$\cos 2x = \dfrac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$	$\tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$
$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$	$\cos 3x = -3\cos x + 4\cos^3 x$	
$\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$		$\tan p + \tan q = \dfrac{\sin(p+q)}{\cos p \cos q}$
$\sin p - \sin q = 2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}$		
$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$		$\tan p - \tan q = \dfrac{\sin(p-q)}{\cos p \cos q}$
$\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$		
$\sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$		
$\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$		
$\sin x \sin y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]$		