LE GOUVERNEMENT
DU GRAND-DUCHÉ DE LUXEMBOURG
Ministère de l'Éducation nationale,
de l'Enfance et de la Jeunesse

EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES CLASSIQUES
2021
CORRIGÉ – BARÈME

BRANCHE	SECTION(S)	ÉPREUVE ÉCRITE
Mathématiques 1	**C**	*Durée de l'épreuve :* *1h45* *Date de l'épreuve :* *15/06/21*

Question 1 (12 points)

Posons $P(z)=z^3-(1+2i)z^2-(11+20i)z-69+42i$.

P admet une racine imaginaire pure $\Leftrightarrow \exists b\in\mathbb{R}$ tel que $P(bi)=0$.

$$P(bi)=0 \Leftrightarrow (bi)^3-(1+2i)(bi)^2-(11+20i)(bi)-69+42i=0$$

$$\Leftrightarrow b^2+20b-69+(-b^3+2b^2-11b+42)i=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b^2+20b-69=0 & (1) \\ -b^3+2b^2-11b+42=0 & (2) \end{cases}$$

Résolution de (1):

$$\Delta=20^2+4\cdot1\cdot69=676=26^2$$

$$b_1=\frac{-20-26}{2}=-23; b_2=\frac{-20+26}{2}=3$$

$b=3$ dans (2): $-3^3+2\cdot3^2-11\cdot3+42=0$

Donc 3i est une racine imaginaire pure de P(z) et P(z) est divisible par z-3i.

Schéma de Horner:

	1	-1-2i	-11-20i	-69+42i
3i		3i	-3-3i	69-42i
	1	-1+i	-14-23i	0

Donc $P(z)=(z-3i)\underbrace{\left(z^2+(-1+i)z-14-23i\right)}_{Q(z)}$

Reste à résoudre: Q(z)=0.

$$\Delta=(-1+i)^2-4(-14-23i)=1-2i-1+56+92i=56+90i.$$

Racines carrées complexes de Δ :

$\delta = x + yi$ est une r.c.c. de $\Delta \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 56 \\ 2xy = 90 \end{cases}$ avec x,y $\in \mathbb{R}$

De plus: $\left|\delta^2\right| = \left|\Delta\right| \Leftrightarrow x^2 + y^2 = \sqrt{56^2 + 90^2} \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 106$

D'où le système: $\begin{cases} x^2 - y^2 = 56 & (1) \\ xy = 45 & (2) \\ x^2 + y^2 = 106 & (3) \end{cases}$

$(1)+(3): 2x^2 = 162 \Leftrightarrow x^2 = 81 \Leftrightarrow x = -9$ ou $x = 9$

$(3)-(1): 2y^2 = 50 \Leftrightarrow y^2 = 25 \Leftrightarrow y = -5$ ou y $= 5$

Par (2): x et y ont le même signe.

D'où: $\delta_1 = -9 - 5i; \delta_2 = 9 + 5i$

$z_1 = \dfrac{1 - i - 9 - 5i}{2} = -4 - 3i$ et $z_2 = \dfrac{1 - i + 9 + 5i}{2} = 5 + 2i.$

Donc $S = \left\{3i; -4 - 3i; 5 + 2i\right\}$.

Question 2 (3 + 1 + 4 + 3 = 11 points)

$$a) z_1 = \frac{-3\sqrt{3} + i}{\sqrt{3} + 2i} \cdot \frac{\sqrt{3} - 2i}{\sqrt{3} - 2i} = \frac{-9 + 6\sqrt{3}i + \sqrt{3}i + 2}{7} = \frac{-7 + 7\sqrt{3}i}{7} = -1 + \sqrt{3}i \text{ (forme algébrique)}$$

$$\left|z_1\right| = \sqrt{(-1)^2 + 3} = 2$$

$$\begin{cases} \cos\varphi_1 = -\dfrac{1}{2} \\ \sin\varphi_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \varphi_1 = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

$$z_1 = 2cis\left(\frac{2\pi}{3}\right) \text{ (forme trigonométrique)}$$

$$b) \left|z_2\right| = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{2}$$

$$\begin{cases} \cos\varphi_2 = \dfrac{3}{3\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\varphi_2 = \dfrac{-3}{3\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \varphi_2 = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

$$z_2 = 3\sqrt{2}cis\left(-\frac{\pi}{4}\right) \text{ (forme trig.)}$$

$$c) Z = \frac{\left(2cis\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)^2}{\left(3\sqrt{2}cis\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right)^4} = \frac{4cis\left(\frac{4\pi}{3}\right)}{81 \cdot 4cis(-\pi)} = \frac{1}{81}cis\left(\tfrac{4\pi}{3} + \pi\right) = \frac{1}{81}cis\left(\tfrac{7\pi}{3}\right) = \frac{1}{81}cis\left(\tfrac{\pi}{3}\right) \text{ (f. trig.)}$$

$$Z = \frac{1}{81}\left(\cos\left(\tfrac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\tfrac{\pi}{3}\right)\right) = \frac{1}{162} + \frac{\sqrt{3}}{162}i \text{ (f. alg.)}$$

$d) z_3 = -8cis\left(\frac{\pi}{3}\right) = 8cis(\pi)cis\left(\frac{\pi}{3}\right) = 8cis\left(\frac{4\pi}{3}\right)$

Soit $r\ cis\alpha$ une racine cubique complexe de z_3.

$$(rcis\alpha)^3 = 8cis\left(\tfrac{4\pi}{3}\right) \Leftrightarrow r^3cis(3\alpha) = 8cis\left(\tfrac{4\pi}{3}\right)$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} r^3 = 8 \\ 3\alpha = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} r = 2 \\ \alpha = \frac{4\pi}{9} + k\cdot\frac{2\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

Racines cubiques complexes de z_3:

$$Z_k = 2cis\left(\tfrac{4\pi}{9} + k\cdot\tfrac{2\pi}{3}\right) \text{ avec } k \in \{0;1;2\}$$
$$Z_0 = 2cis\left(\tfrac{4\pi}{9}\right); Z_1 = 2cis\left(\tfrac{4\pi}{9} + \tfrac{2\pi}{3}\right) = 2cis\left(\tfrac{10\pi}{9}\right); Z_2 = 2cis\left(\tfrac{4\pi}{9} + \tfrac{4\pi}{3}\right) = 2cis\left(\tfrac{16\pi}{9}\right)$$

Question 3 (4 + 6 = 10 points)

a) Soit A la matrice associée au système.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} m & -1 & 2 \\ m & m-2 & 3 \\ -m & 1 & m \end{vmatrix} = m^3 + m^2 - 2m = m(m^2 + m - 2) = m(m-1)(m+2)$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{Factorisation de } m^2 + m - 2: \\ \Delta = 9; m_1 = 1; m_2 = -2; m^2 + m - 2 = (m-1)(m+2) \end{array}\right]$$

$$\det(A) = 0 \Leftrightarrow m = 0 \text{ ou } m = 1 \text{ ou } m = -2$$

Le système admet une solution unique $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0 \Leftrightarrow m \in \mathbb{R} \setminus \{0;1;-2\}$.

b) Pour **m= 1**, le système s'écrit:

$$\begin{cases} x - y + 2z = 3 & (1) \\ x - y + 3z = 1 & (2) \\ -x + y + z = -9 & (3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y + 2z = 3 & \\ z = -2 & (2)-(1) \\ 3z = -6 & (3)+(1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y + 2z = 3 \\ z = -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 7 \\ z = -2 \end{cases}$$

Le système est simplement indéterminé. Posons $x = \alpha$.

$S = \{(\alpha; \alpha - 7; -2) / \alpha \in \mathbb{R}\}$

Les 3 équations du système représentent 3 plans qui se coupent suivant la droite d passant par A(0;-7;-2) et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$.

Pour **m= -2**, le système s'écrit:

$$\begin{cases}-2x-y+2z=3 & (1)\\ -2x-4y+3z=1 & (2)\\ 2x+y-2z=-9 & (3)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-2x-y+2z=3 & \\ -3y+z=-2 & |(2)-(1)\\ 0=-6 & |(3)+(1)\end{cases}$$

Donc $S=\varnothing$.

Les 3 équations du système représentent 3 plans qui n'ont aucun point commun.

Question 4 (5 + 3 + 4 = 12 points)

a) A, B et C sont alignés

$\Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AC}=k\cdot\overrightarrow{AB}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}1=4k\\ 1=-2k\\ -2=k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k=0,25\\ k=-0,5\\ k=-2\end{cases}\text{ système impossible}$$

Donc A, B et C ne sont pas alignés.

$$M(x;y;z)\in\pi \Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\begin{vmatrix}x+1 & 4 & 1\\ y-2 & -2 & 1\\ z & 1 & -2\end{vmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow 3x+9y+6z-15=0$$

$$\Leftrightarrow x+3y+2z-5=0 \text{ (équation cartésienne de } \pi)$$

b) Comme d est perpendiculaire à π, tout vecteur normal à π est un vecteur directeur de d.

Vecteur normal à π : $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}$

$$M(x;y;z)\in d \Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{R}\text{ tel que }\overrightarrow{DM}=k\cdot\vec{n}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=k+1\\ y=3k-2\\ z=2k-1\end{cases}\quad\text{(syst. d'équations paramétriques de d)}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}k=x-1\\ y=3x-5\\ z=2x-3\end{cases}$$

Système d'équations cartésiennes de d:

$$\begin{cases} 3x-y-5=0 \\ 2x-z-3=0 \end{cases}$$

c) Les coordonnées du point I sont solutions du système:

$$\begin{cases} x=k+1 & (1) \\ y=3k-2 & (2) \\ z=2k-1 & (3) \\ x+3y+2z-5=0 & (4) \end{cases}$$

$(1),(2),(3)$ dans $(4): k+1+9k-6+4k-2-5=0 \Leftrightarrow k=\frac{6}{7}$

Donc $I\left(\frac{13}{7};\frac{4}{7};\frac{5}{7}\right)$

Question 5 ((2 + 3 + 3) + (1 + 2 + 2 + 2) = 15 points)

1) Tirage sans ordre de 5 cartes parmi 32.

Nombre de tirages possibles: $C_{32}^{5}=201376$.

a) A: obtenir au moins un as

$p(A)=1-p\left(\overline{A}\right)$ avec $\overline{A}$: n'obtenir aucun as

$$=1-\frac{C_{28}^{5}}{C_{32}^{5}}=1-\frac{98280}{201376}=\frac{1841}{3596}\approx 0{,}51$$

b) B: obtenir exactement 3 cartes d'une même couleur

Nombre de cas favorables: $\underbrace{4}_{\substack{\text{choix}\\\text{couleur}}} \cdot \underbrace{C_{8}^{3}}_{\substack{\text{3cartes}\\\text{d'1couleur}}} \cdot \underbrace{C_{24}^{2}}_{\substack{\text{2cartes}\\\text{couleur}\\\text{différente}}} =4\cdot 56\cdot 276=61824$

$$p\left(B\right)=\frac{61824}{201376}=\frac{276}{899}\approx 0{,}31$$

c) Nombre de tirages possibles: $C_{32}^{5}=201376$.

C: obtenir exactement 2 trèfles et une dame

Nombre de cas favorables= $\underbrace{1}_{\substack{\text{dame}\\\text{trèfle}}} \cdot \underbrace{C_{7}^{1}}_{\substack{\text{1trèfle}\\\neq\text{dame}}} \cdot \underbrace{C_{21}^{3}}_{\substack{\text{3cartes}\\\neq\text{trèfle}\\\neq\text{dame}}} + \underbrace{C_{3}^{1}}_{\substack{\text{1dame}\\\neq\text{trèfle}}} \cdot \underbrace{C_{7}^{2}}_{\substack{\text{2trèfles}\\\neq\text{dame}}} \cdot \underbrace{C_{21}^{2}}_{\substack{\text{2cartes}\\\neq\text{trèfle}\\\neq\text{dame}}} =1\cdot 7\cdot 1330+3\cdot 21\cdot 210=22540$

$$p(C)=\frac{22540}{201376}=\frac{805}{7192}\approx 0{,}11$$

2)a) Tirage avec ordre et sans remise de 10 personnes parmi 10.
Nombre de possibilités:

$P_{10} = 10! = 3628800$

b) Nombre de possibilités:

$$\underbrace{2}_{\substack{2\text{poss.pour}\\ \text{placer}\\ \text{les 2 groupes}}} \cdot \underbrace{P_5}_{\substack{\text{permut.}\\ \text{filles}}} \cdot \underbrace{P_5}_{\substack{\text{permut.}\\ \text{garçons}}} = 28800$$

c) Nombre de possibilités:

$$\underbrace{9}_{\substack{\text{emplacements}\\ \text{Anne,Marie}}} \cdot \underbrace{P_2}_{\substack{\text{permutat.}\\ \text{Anne,Marie}}} \cdot \underbrace{P_8}_{\substack{\text{permutations}\\ \text{des 8 autres}}} = 9 \cdot 2 \cdot 8! = 725760$$

d) Nombre de possibilités:

$$\underbrace{P_5}_{\substack{\text{permut.}\\ \text{filles}}} \cdot \underbrace{P_5}_{\substack{\text{permut.}\\ \text{garçons}}} \cdot \underbrace{P_2}_{\substack{\text{FGFG...}\\ \text{ou GFGF...}}} = 5! \cdot 5! \cdot 2 = 28800$$