| | |
|---|---|
| LE GOUVERNEMENT DU GRAND-DUCHÉ DE LUXEMBOURG<br>Ministère de l'Éducation nationale, de l'Enfance et de la Jeunesse | **EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES CLASSIQUES**<br>**2021**<br>**CORRIGÉ – BARÈME** |

| BRANCHE | SECTION(S) | ÉPREUVE ÉCRITE |
|---|---|---|
| **Mathématiques 2** | **C, D** | *Durée de l'épreuve :* *2h45min*<br>*Date de l'épreuve :* 20/09/2021 |

## Question 1

(4+5=9P)

1) *Démonstration (EM66 p.56)*

On a :

$\log_a x = y \Leftrightarrow x = a^y$ et $\log_b x = z \Leftrightarrow x = b^z$.

Donc :

$$\begin{aligned} \log_b x &= \log_b a^y \\ &= y \cdot \log_b a \\ &= \log_a x \cdot \log_b a \end{aligned}$$

Finalement :

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

- Si $x = b$, on obtient $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$.
- Si $b = 10$, on obtient $\log_a x = \dfrac{\log x}{\log a}$.
- Si $b = e$, on obtient $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$.

2) $\log_3(x+5) - 6\log_{27}(2-2x) \geqslant \log_{\frac{1}{3}} 2 \ (I)$

*Conditions d'existence :*

(i) $x + 5 > 0 \Leftrightarrow x > -5$

(ii) $2 - 2x > 0 \Leftrightarrow -2x > -2 \Leftrightarrow x < 1$

$D = ]-5; 1[$

$$\begin{aligned}
(I) \ \Leftrightarrow\ & \log_3(x+5) - 6 \cdot \frac{\log_3(2-2x)}{\log_3 27} \geqslant \frac{\log_3 2}{\log_3 \frac{1}{3}} \\
\Leftrightarrow\ & \log_3(x+5) - 6 \cdot \frac{\log_3(2-2x)}{3} \geqslant \frac{\log_3 2}{-1} \\
\Leftrightarrow\ & \log_3(x+5) - 2 \cdot \log_3(2-2x) \geqslant -\log_3 2 \\
\Leftrightarrow\ & \log_3(x+5) + \log_3 2 \geqslant 2\log_3(2-2x) \\
\Leftrightarrow\ & \log_3\left(2(x+5)\right) \geqslant \log_3(2-2x)^2 \\
\Leftrightarrow\ & 2(x+5) \geqslant (2-2x)^2 \qquad (\log_3 \text{ bij. strict. } \nearrow) \\
\Leftrightarrow\ & 2x + 10 \geqslant 4 - 8x + 4x^2 \\
\Leftrightarrow\ & 4x^2 - 10x - 6 \leqslant 0 \quad \Big| \cdot \tfrac{1}{2} \\
\Leftrightarrow\ & 2x^2 - 5x - 3 \leqslant 0
\end{aligned}$$

Résolvons :

$$2x^2 - 5x - 3 = 0 \quad (\Delta = 49)$$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow\ & x = \tfrac{5-7}{4} \text{ ou } x = \tfrac{5+7}{4} \\
\Leftrightarrow\ & x = \tfrac{-2}{4} \text{ ou } x = \tfrac{12}{4} \\
\Leftrightarrow\ & x = -\tfrac{1}{2} \text{ ou } x = 3
\end{aligned}$$

*Tableau de signes :*

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{1}{2}$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2x^2 - 5x - 3$ | | + | 0 | - | 0 | + | |

Finalement :

$S = [-\frac{1}{2}; 3] \cap ]-5; 1[ = [-\frac{1}{2}; 1[$

## Question 2

**((4+4+4+2)+7=21P)**

1) Soit $f$ la fonction définie par :

$$f(x) = (2 - x^2) \cdot e^{-x}$$

a) • $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$

• $\lim\limits_{x \to -\infty} \underbrace{(2 - x^2)}_{\to -\infty} \cdot \underbrace{e^{-x}}_{\to +\infty}$

$= -\infty$

pas d'A.H. à gauche

*Formules de Cauchy :*

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x}$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} \underbrace{\left(\dfrac{2}{x} - x\right)}_{\to +\infty} \cdot \underbrace{e^{-x}}_{\to +\infty}$

$= +\infty$

pas d'A.O à gauche

• $\lim\limits_{x \to +\infty} \underbrace{(2 - x^2)}_{\to -\infty} \cdot \underbrace{e^{-x}}_{\to 0}$ f.i.

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2 - x^2 \to -\infty}{e^x \quad \to +\infty}$ f.i.

$\overset{\text{(H)}}{=} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-2x \to -\infty}{e^x \quad \to +\infty}$ f.i.

$\overset{\text{(H)}}{=} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-2 \to -2}{e^x \to +\infty}$

$= 0$

A.H. à droite : $y = 0$

b) Pour tout $x \in \operatorname{dom} f' = \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2x \cdot e^{-x} + (2 - x^2) \cdot (-e^{-x}) \\ &= e^{-x} \cdot (-2x - 2 + x^2) \\ &= (x^2 - 2x - 2) \cdot e^{-x} \end{aligned}$$

*Extrema éventuels :*

$f'(x) = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 - 2x - 2) \cdot \underbrace{e^{-x}}_{>0} = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 2 = 0 \quad (\Delta = 4 + 8 = 12)$

$\Leftrightarrow x = \frac{2 - \sqrt{12}}{2}$ ou $x = \frac{2 + \sqrt{12}}{2}$

$\Leftrightarrow x = \underbrace{1 - \sqrt{3}}_{\approx -0{,}73}$ ou $x = \underbrace{1 + \sqrt{3}}_{\approx 2{,}73}$

*Tableau de variations :*

| $x$ | $-\infty$ | | $1 - \sqrt{3}$ | | $1 + \sqrt{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | 0 | - | 0 | + | |
| $f$ | $-\infty$ | ↗ | $f(1-\sqrt{3})$ max | ↘ | $f(1+\sqrt{3})$ min | ↗ | 0 |

Maximum : $f(1 - \sqrt{3}) \approx 3{,}04$

Minimum : $f(1 + \sqrt{3}) \approx -0{,}36$

c) Pour tout $x \in \operatorname{dom} f'' = \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} f''(x) &= (2x - 2) \cdot e^{-x} + (x^2 - 2x - 2) \cdot (-e^{-x}) \\ &= e^{-x} \cdot (2x - 2 - x^2 + 2x + 2) \\ &= (-x^2 + 4x) \cdot e^{-x} \end{aligned}$$

*Points d'inflexion éventuels :*

$f''(x) = 0$

$\Leftrightarrow (-x^2 + 4x) \cdot \underbrace{e^{-x}}_{>0} = 0$

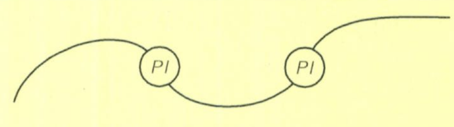
$\Leftrightarrow -x^2 + 4x = 0$

$\Leftrightarrow x(-x + 4) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $-x + 4 = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 4$

*Tableau de concavité :*

| $x$ | $-\infty$ | | 0 | | 4 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | | - | 0 | + | 0 | - | |
| $C_f$ |  | | | | | | |



*Coordonnées des points d'inflexion :*

$I_1(0; 2)$ et $I_2\left(4; -\frac{14}{e^4}\right)$ $\quad \left(-\frac{14}{e^4} \approx -0.26\right)$

## Question 3

**(4+4+4=12P)**

1) Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 - 3}{2x^4 + x^2}$$

Déterminer $a$ et $b$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ :

$$\begin{aligned}
& f(x) && = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{2x^2+1} \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{x^2-3}{x^2(2x^2+1)} && = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{2x^2+1} \\
& && \quad \mid \cdot \underbrace{x^2(2x^2+1)}_{\neq 0} \\
\Leftrightarrow \quad & x^2 - 3 && = a(2x^2+1) + bx^2 \\
\Leftrightarrow \quad & x^2 - 3 && = 2ax^2 + a + bx^2 \\
\Leftrightarrow \quad & x^2 - 3 && = (2a+b)x^2 + a
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b = 1 \\ a = -3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 7 \\ a = -3 \end{cases}$$

Finalement :

$$f(x) = -\frac{3}{x^2} + \frac{7}{2x^2+1}$$

Les primitives de $f$ sont données par :

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int f(x)\, \mathrm{d}x \\
&= \int \left( -\frac{3}{x^2} + \frac{7}{2x^2+1} \right) \mathrm{d}x \\
&= -3 \int x^{-2}\, \mathrm{d}x + 7 \cdot \tfrac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{1 \cdot \sqrt{2}}{1 + (\sqrt{2}x)^2}\, \mathrm{d}x \\
&= -3 \cdot \frac{x^{-1}}{-1} + \tfrac{7}{\sqrt{2}} \operatorname{Arctan}(\sqrt{2}x) + k \\
&= \frac{3}{x} + \tfrac{7}{\sqrt{2}} \operatorname{Arctan}(\sqrt{2}x) + k \quad (k \in \mathbb{R}) \quad \text{sur } I \subset \mathbb{R}^*
\end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned}
K &= \int_0^{\sqrt{3}} \frac{4x+3}{\sqrt{4-x^2}}\, \mathrm{d}x \\
&= 4 \cdot \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\, \mathrm{d}x + 3 \cdot \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\, \mathrm{d}x \\
&= 4 \cdot \left(-\tfrac{1}{2}\right) \cdot \int_0^{\sqrt{3}} (-2) \cdot x \cdot (4-x^2)^{-\frac{1}{2}}\, \mathrm{d}x \\
&\quad + 3 \cdot \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{4} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}}\, \mathrm{d}x \\
&= -2 \left[ \frac{(4-x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right]_0^{\sqrt{3}} + 3 \cdot \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1 \cdot \frac{1}{2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}}\, \mathrm{d}x \\
&= -4 \left[ \sqrt{4-x^2} \right]_0^{\sqrt{3}} + 3 \left[ \operatorname{Arcsin}\left(\tfrac{x}{2}\right) \right]_0^{\sqrt{3}} \\
&= -4(\sqrt{1} - \sqrt{4}) + 3\left( \operatorname{Arcsin}\tfrac{\sqrt{3}}{2} - \operatorname{Arcsin} 0 \right) \\
&= -4 \cdot (-1) + 3 \cdot \left( \tfrac{\pi}{3} - 0 \right) \\
&= 4 + \pi
\end{aligned}$$

3) Soit $g$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = (\sin x - 1)^2 = \sin^2 x - 2\sin x + 1$$

Les primitives de $g$ sont données par :

$$\begin{aligned}
G(x) &= \int g(x)\, \mathrm{d}x \\
&= \int \left( \sin^2 x - 2\sin x + 1 \right) \mathrm{d}x \\
&= \int \left( \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cos 2x - 2\sin x + 1 \right) \mathrm{d}x \\
&= \int \left( \tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{2}\cos 2x - 2\sin x \right) \mathrm{d}x \\
&= \int \tfrac{3}{2}\, \mathrm{d}x - \tfrac{1}{2} \int \cos 2x\, \mathrm{d}x - 2 \int \sin x\, \mathrm{d}x \\
&= \tfrac{3}{2}x - \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} \int 2 \cdot \cos 2x\, \mathrm{d}x + 2\cos x + k \\
&= \tfrac{3}{2}x - \tfrac{1}{4}\sin 2x + 2\cos x + k \quad (k \in \mathbb{R}) \quad \text{sur } I \subset \mathbb{R}
\end{aligned}$$

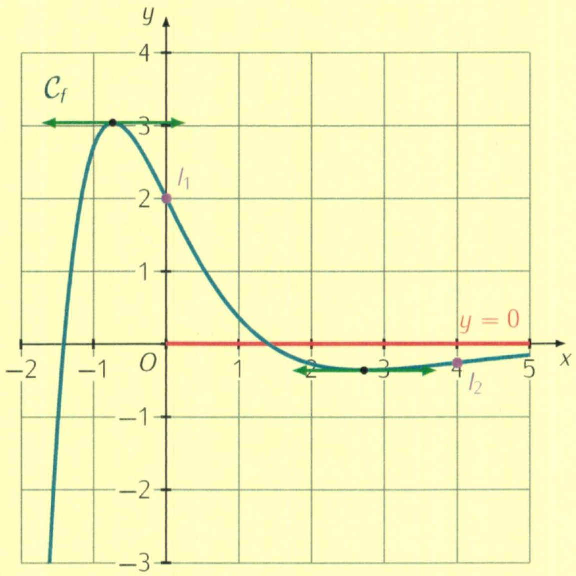
On cherche $k$ tel que :

$$\begin{aligned}
& G(0) = -1 \\
\Leftrightarrow\ & \tfrac{3}{2} \cdot 0 - \tfrac{1}{4}\sin 0 + 2\cos 0 + k = -1 \\
\Leftrightarrow\ & 2 + k = -1 \\
\Leftrightarrow\ & k = -3
\end{aligned}$$

Finalement, la primitive cherchée est :

$$G(x) = \tfrac{3}{2}x - \tfrac{1}{4}\sin 2x + 2\cos x - 3 \quad \text{sur } I \subset \mathbb{R}$$

d) *Représentation graphique :*




2) *Signe de $f(x)$ :*

Pour tout $x \in \operatorname{dom} f$ :

$$f(x) \geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow (2 - x^2) \cdot \underbrace{e^{-x}}_{>0} \geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow 2 - x^2 \geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 \leqslant 2$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{2} \leqslant x \leqslant \sqrt{2}$$

| $x$ | $-\infty$ | | $-\sqrt{2}$ | | $\sqrt{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | - | 0 | + | 0 | - | |

Sur $[-1; 0]$, $\mathcal{C}_f$ se situe au-dessus de l'axe des abscisses.

$$\mathcal{A} = \int_{-1}^{0} (2 - x^2) \cdot e^{-x} \, dx$$

*IPP :*
$u(x) = 2 - x^2 \quad v'(x) = e^{-x}$
$u'(x) = -2x \quad v(x) = -e^{-x}$

$$\mathcal{A} = \Big[-(2 - x^2)e^{-x}\Big]_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} 2x \cdot e^{-x} \, dx$$

*IPP :*
$u(x) = 2x \quad v'(x) = e^{-x}$
$u'(x) = 2 \quad v(x) = -e^{-x}$

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \Big[-(2 - x^2)e^{-x}\Big]_{-1}^{0} - \left(\Big[-2xe^{-x}\Big]_{-1}^{0} + \int_{-1}^{0} 2e^{-x} \, dx\right) \\
&= \Big[-(2 - x^2)e^{-x}\Big]_{-1}^{0} - \Big[-2xe^{-x}\Big]_{-1}^{0} - 2\int_{-1}^{0} e^{-x} \, dx \\
&= \Big[-(2 - x^2)e^{-x}\Big]_{-1}^{0} - \Big[-2xe^{-x}\Big]_{-1}^{0} + 2\Big[e^{-x}\Big]_{-1}^{0} \\
&= (-2 + e) - (0 - 2e) + 2(1 - e) \\
&= -2 + e + 2e + 2 - 2e \\
&= e \text{ u.a.}
\end{aligned}$$

## Question 4

**(4+(2+3)=9P)**

1) $e^{2x} - 5e^x + 4 \leqslant 0 \quad (I)$

*Domaine de résolution :* $D = \mathbb{R}$

Posons $t = e^x$ :

$(I) \Leftrightarrow t^2 - 5t + 4 \leqslant 0$

Résolvons :

$$t^2 - 5t + 4 = 0 \quad (\Delta = 25 - 16 = 9)$$

$\Leftrightarrow t = \frac{5-3}{2}$ ou $t = \frac{5+3}{2}$

$\Leftrightarrow t = \frac{2}{2}$ ou $t = \frac{8}{2}$

$\Leftrightarrow t = 1$ ou $t = 4$

*Tableau de signes :*

| $t$ | $-\infty$ 1 4 $+\infty$ |
|---|---|
| $t^2 - 5t + 4$ | + 0 - 0 + |

$(I) \Leftrightarrow t^2 - 5t + 4 \leqslant 0$

$\Leftrightarrow 1 \leqslant t \leqslant 4$

$\Leftrightarrow 1 \leqslant e^x \leqslant 4$

$\Leftrightarrow \ln 1 \leqslant \ln e^x \leqslant \ln 4 \quad$ (ln bij. strict. $\nearrow$)

$\Leftrightarrow 0 \leqslant x \leqslant \ln 4$

$S = [0; \ln 4]$

2) Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (e^x - 2)^2 - \frac{e^{2x}}{e^x}$$

a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f(x) &= (e^x - 2)^2 - \frac{e^{2x}}{e^x} \\ &= e^{2x} - 4e^x + 4 - e^x \\ &= e^{2x} - 5e^x + 4 \end{aligned}$$

En utilisant les résultats du point 1), on obtient :

| $x$ | $-\infty$ 0 $\ln 4$ $+\infty$ |
|---|---|
| $f(x) = e^{2x} - 5e^x + 4$ | + 0 - 0 + |

b) Les primitives de $f$ sont données par :

$$\begin{aligned} F(x) &= \int f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int \left(e^{2x} - 5e^x + 4\right)\,\mathrm{d}x \\ &= \tfrac{1}{2}e^{2x} - 5e^x + 4x + k \quad (k \in \mathbb{R}) \quad \text{sur } I \subset \mathbb{R} \end{aligned}$$

- Sur $[-1; 0]$, $\mathcal{C}_f$ se situe au-dessus de l'axe des abscisses.
- Sur $[0; \ln 4]$, $\mathcal{C}_f$ se situe en dessous de l'axe des abscisses.

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{0}^{\ln 4} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \left[F(x)\right]_{-1}^{0} - \left[F(x)\right]_{0}^{\ln 4} \\ &= F(0) - F(-1) - F(\ln 4) + F(0) \\ &= 2 \cdot F(0) - F(-1) - F(\ln 4) \\ &= 2 \cdot \left(-\tfrac{9}{2}\right) - \left(\tfrac{1}{2e^2} - \tfrac{5}{e} - 4\right) - (8 - 20 + 4\ln 4) \\ &= -9 - \tfrac{1}{2e^2} + \tfrac{5}{e} + 4 - 8 + 20 - 4\ln 4 \\ &= 7 - \tfrac{1}{2e^2} + \tfrac{5}{e} - 4\ln 4 \\ &\approx 3,227 \text{ u.a.} \end{aligned}$$

## Question 5

**(4+5=9P)**

Soit $h$ la fonction définie par :

$$h(x) = x - 2 + \ln \frac{x}{x+2}$$

1) *Conditions d'existence :*

(i) $x + 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -2$

(ii) $\dfrac{x}{x+2} > 0$

*Tableau de signes :*

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | | - | | - | 0 | + | |
| $x+2$ | | - | 0 | + | | + | |
| $\dfrac{x}{x+2}$ | | + | ‖ | - | 0 | + | |

dom $h = ]-\infty; -2[ \cup ]0; +\infty[$

*Asymptote oblique :*

⋆ Variante 1 :

On a :

$h(x) - (x-2) = \ln \dfrac{x}{x+2}$ et $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \ln \underbrace{\dfrac{x}{x+2}}_{\to 1} = 0.$

Ainsi, le graphe de $h$ admet la droite d'équation $y = x-2$ comme asymptote oblique à gauche et à droite.

⋆ Variante 2 :

*Formules de Cauchy :*

- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{h(x)}{x}$

$$= \lim_{x\to\pm\infty}\left(1 - \underbrace{\frac{2}{x}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{\ln\frac{x}{x+2}}{x}}_{\to 0} \begin{matrix}\to 0 \\ \to \pm\infty\end{matrix}\right)$$

$= 1$

Calcul à part : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \ln \underbrace{\dfrac{x}{x+2}}_{\to 1} = 0$

- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \big(h(x) - x\big) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \Big(-2 + \underbrace{\ln \dfrac{x}{x+2}}_{\to 0}\Big) = -2$

Ainsi, le graphe de $h$ admet la droite d'équation $y = x-2$ comme asymptote oblique à gauche et à droite.

2) Sur $[4;8]$, le graphe de $h$ se situe au-dessus de l'axe des abscisses.

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \int_4^8 h(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_4^8 \left(x - 2 + \ln\frac{x}{x+2}\right)\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{x^2}{2} - 2x\right]_4^8 + \int_4^8 \ln\frac{x}{x+2}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

*IPP :*

$u(x) = \ln \dfrac{x}{x+2}$ $\qquad v'(x) = 1$

$$\begin{aligned}
u'(x) &= \frac{x+2}{x}\cdot\frac{1\cdot(x+2) - x\cdot 1}{(x+2)^2} \qquad v(x) = x \\
&= \frac{x+2-x}{x(x+2)} \\
&= \frac{2}{x(x+2)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= 16 - 0 + \left[x\cdot\ln\frac{x}{x+2}\right]_4^8 - \int_4^8 x\cdot\frac{2}{x(x+2)}\,\mathrm{d}x \\
&= 16 + 8\ln\tfrac{8}{10} - 4\ln\tfrac{4}{6} - 2\cdot\int_4^8 \frac{1}{x+2}\,\mathrm{d}x \\
&= 16 + 8\ln\tfrac{4}{5} - 4\ln\tfrac{2}{3} - 2\cdot[\ln(x+2)]_4^8 \\
&= 16 + 8\ln\tfrac{4}{5} - 4\ln\tfrac{2}{3} - 2\cdot(\ln 10 - \ln 6) \\
&= 16 + 8\ln\tfrac{4}{5} - 4\ln\tfrac{2}{3} - 2\ln 10 + 2\ln 6 \\
&(= \cdots = 16 + 12\ln 2 + 6\ln 3 - 10\ln 5) \\
&\approx 14,815 \text{ u.a.}
\end{aligned}$$