LE GOUVERNEMENT
DU GRAND-DUCHÉ DE LUXEMBOURG
Ministère de l'Éducation nationale,
de l'Enfance et de la Jeunesse

EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES CLASSIQUES

2021

BRANCHE	SECTION(S)	ÉPREUVE ÉCRITE
Mathématiques 2	**C, D**	*Durée de l'épreuve : 2h45* *Date de l'épreuve : 20/09/2021*

Question 1 *(4+5=9P)*

1) Démontrer la propriété suivante :
Si a et b sont des réels strictement positifs distincts de 1, alors, pour tout réel x strictement positif,
$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}\ .$$
En déduire trois cas particuliers importants de cette formule.

2) Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'inéquation suivante :
$$\log_3(x+5) - 6\log_{27}(2-2x) \geq \log_{\frac{1}{3}} 2$$

Question 2 *((4+4+4+2)+7=21P)*

1) Soit f la fonction définie par :
$$f(x) = (2-x^2)\cdot e^{-x}\ .$$
   a) Déterminer le domaine de définition et étudier le comportement asymptotique de f.
   b) Montrer que $f'(x) = (x^2-2x-2)\cdot e^{-x}$ et en déduire les variations de f. On donnera une valeur approchée à 10^{-2} près des extrema éventuels.
   c) Calculer la dérivée seconde de f, dresser le tableau de concavité et déterminer les coordonnées des points d'inflexion éventuels.
   d) Représenter graphiquement la fonction f dans un repère orthonormé d'unité 1 cm.

2) Étudier le signe de $f(x)$, puis calculer la valeur exacte de l'aire de la partie du plan délimitée par le graphe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=-1$ et $x=0$.

Question 3 *(4+4+4=12P)*

1) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par
$$f(x) = \frac{x^2-3}{2x^4+x^2}\ .$$
Déterminer les réels a et b tels que pour tout réel $x \in \mathbb{R}^*$ on a :
$$f(x) = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{2x^2+1}$$
et en déduire les primitives de f sur $I \subset \mathbb{R}^*$.

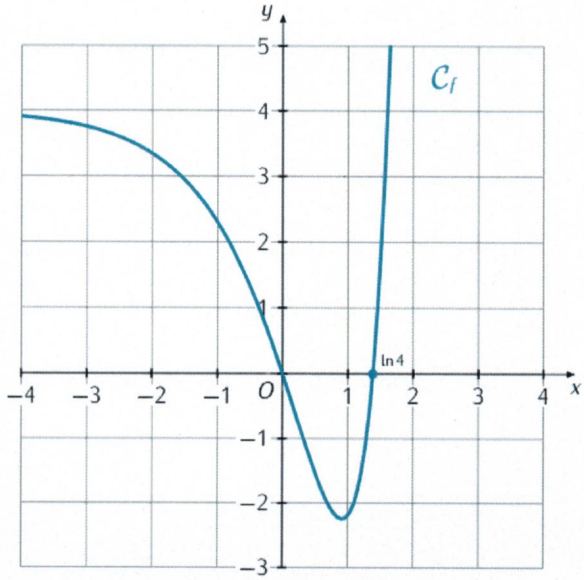
2) Calculer la valeur exacte de l'intégrale définie suivante :
$$K = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{4x+3}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$$

3) Déterminer la primitive G de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (\sin x - 1)^2$ telle que $G(0) = -1$.

Question 4

(4+(2+3)=9P)

1) Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'inéquation suivante :
$$e^{2x} - 5e^x + 4 \leq 0$$
2) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x) = (e^x - 2)^2 - \frac{e^{2x}}{e^x}$$
et soit C_f sa courbe représentative.
   a) Simplifier l'expression de $f(x)$ et utiliser les résultats du point 1) pour étudier le signe de $f(x)$.
   b) Calculer l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe C_f , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = -1$ et $x = \ln 4$. Pour le calcul d'aire, vous pouvez utiliser les informations de la figure.

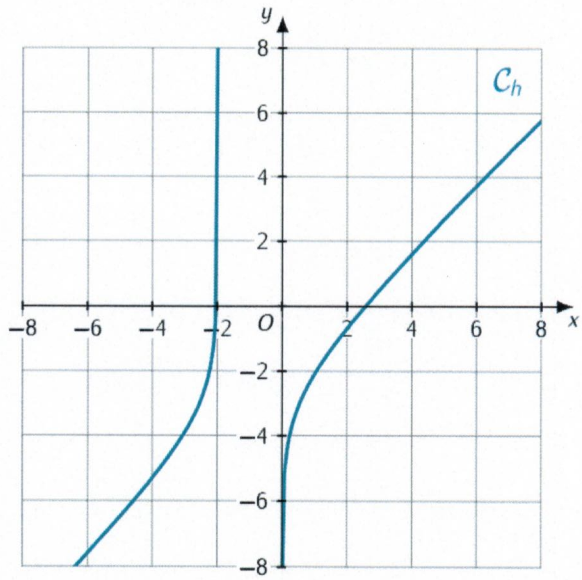


Question 5

(4+5=9P)

Soit h la fonction définie par :
$$h(x) = x - 2 + \ln\frac{x}{x+2}$$
et soit C_h son graphe dans un repère orthonormé.

1) Déterminer le domaine de définition de la fonction h et démontrer que le graphe de h admet une asymptote oblique dont on précisera une équation.
2) Calculer l'aire de la partie du plan délimitée par le graphe de h, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 4$ et $x = 8$.
   Pour le calcul d'aire, vous pouvez utiliser les informations de la figure.



Formules trigonométriques

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x} \qquad \sin^2 x = \frac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x} \qquad 1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\sin(\pi - x) = \sin x \qquad \sin(\pi + x) = -\sin x \qquad \sin(-x) = -\sin x$$

$$\cos(\pi - x) = -\cos x \qquad \cos(\pi + x) = -\cos x \qquad \cos(-x) = \cos x$$

$$\tan(\pi - x) = -\tan x \qquad \tan(\pi + x) = \tan x \qquad \tan(-x) = -\tan x$$

$$\sin\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \qquad \sin\left(\tfrac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$$

$$\cos\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \qquad \cos\left(\tfrac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$$

$$\tan\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) = \cot x \qquad \tan\left(\tfrac{\pi}{2} + x\right) = -\cot x$$

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

$$\tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$$

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x \qquad \cos^2 x = \tfrac{1}{2}(1+\cos 2x)$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \qquad \sin^2 x = \tfrac{1}{2}(1-\cos 2x)$$

$$\sin 2x = \frac{2\tan x}{1+\tan^2 x} \qquad \cos 2x = \frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x} \qquad \tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$$

$$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x \qquad \cos 3x = -3\cos x + 4\cos^3 x$$

$$\sin p + \sin q = 2\sin\tfrac{p+q}{2}\cos\tfrac{p-q}{2}$$

$$\sin p - \sin q = 2\sin\tfrac{p-q}{2}\cos\tfrac{p+q}{2}$$

$$\cos p + \cos q = 2\cos\tfrac{p+q}{2}\cos\tfrac{p-q}{2}$$

$$\cos p - \cos q = -2\sin\tfrac{p+q}{2}\sin\tfrac{p-q}{2}$$

$$\tan p + \tan q = \frac{\sin(p+q)}{\cos p \cos q}$$

$$\tan p - \tan q = \frac{\sin(p-q)}{\cos p \cos q}$$

$$\sin x \cos y = \tfrac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$$

$$\cos x \cos y = \tfrac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$

$$\sin x \sin y = \tfrac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]$$