EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES CLASSIQUES
2021
CORRIGÉ – BARÈME

BRANCHE	SECTION(S)	ÉPREUVE ÉCRITE	
Mathématiques I	C	*Durée de l'épreuve :*	*1 h 45 min*
		Date de l'épreuve :	*22/09/21*

Question 1

Soit bi, $(b \in \mathbb{R})$ une racine imaginaire pure de P.

$$P(bi) = 0 \Leftrightarrow 2(bi)^3 + (7-12i)(bi)^2 - (7+41i)(bi) - 15(2+i) = 0$$
$$\Leftrightarrow -2b^3 i - 7b^2 + 12b^2 i - 7bi + 41b - 30 - 15i = 0$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2b^3 + 12b^2 - 7b - 15 = 0 & (pi) \\ -7b^2 + 41b - 30 = 0 & (pr) \end{cases}$$

$(pr) \underset{\Delta = 841}{\Leftrightarrow} b = \frac{6}{7} \vee b = 5.$

Dans (pi) : $-2\left(\frac{6}{7}\right)^3 + 12\left(\frac{6}{7}\right)^2 - 7\left(\frac{6}{7}\right) - 15 = -\frac{4611}{343}$ et
$-2(5)^3 + 12(5)^2 - 7(5) - 15 = 0.$

$z_0 = 5i.$

Schéma de Horner:

	2	$7-12i$	$-7-41i$	$-30-15i$
$5i$		$10i$	$10+35i$	$30+15i$
	2	$7-2i$	$3-6i$	0

$P(z) = (z-5i) \cdot \left[2z^2 + (7-2i)z + 3 - 6i\right]$

$P(z) = 0 \Leftrightarrow z = 5i \ \vee \ 2z^2 + (7-2i)z + 3 - 6i = 0.$

$\Delta = (7-2i)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (3-6i) = 21 + 20i.$

Soit $\delta = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$ une racine carrée complexe de $21 + 20i$.

Alors $\begin{cases} x^2 + y^2 = 29 & (1) \\ x^2 - y^2 = 21 & (2) \\ 2xy = 20 > 0 & (3) \end{cases}$

$(1) + (2): 2x^2 = 50 \Rightarrow x = \pm 5;$

$(1) - (2): 2y^2 = 8 \Rightarrow y = \pm 2;$

de (3), x et y ont le même signe.

$\delta = \pm(5 + 2i).$

Les solutions du trinôme du second degré sont $\frac{-7 + 2i \pm (5+2i)}{4} = \left\langle \begin{array}{l} -\frac{1}{2} + i \\ -3 \end{array} \right.$

$S = \left\{5i; -\frac{1}{2} + i; -3\right\}$

On en déduit :

$$P(z) = 2(z-5i)\left(z + \frac{1}{2} - i\right)(z+3)$$
$$= (z-5i)(2z + 1 - 2i)(z+3)$$

Question 2

1)

$$z_1 = \frac{-16+48i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-2i}\cdot\frac{\sqrt{3}+2i}{\sqrt{3}+2i}$$

$$= \frac{-16\sqrt{3}-32i+144i-96\sqrt{3}}{3+4}$$

$$= \frac{-112\sqrt{3}+112i}{7}$$

$= -16\sqrt{3}+16i$ f.a. de z_1 $\quad |-16\sqrt{3}+16i| = 32$

$$= 32\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)$$

$= 32cis\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ f.t. de z_1

2)

$$z_2 = \frac{32\sqrt{3}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)}{i}\cdot\frac{-i}{-i}$$

$= -16\sqrt{3}-48\text{i}$ f.a. de z_2 $\quad |-16\sqrt{3}-48i| = 32\sqrt{3}$

$$= 32\sqrt{3}\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$= 32\sqrt{3}cis\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$ f.t. de z_2

3)

$$z_3 = z_1 + z_2$$

$$= -16\sqrt{3}+16i-16\sqrt{3}-48i$$

$= -32\sqrt{3}-32i$ $\quad |-32\sqrt{3}-32i| = 64$

$$= 64\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)$$

$$= 64cis\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$$

Les racines cubiques complexes de z_3 sont

$Z_k = 4cis\left(-\frac{5\pi}{18}+k\frac{2\pi}{3}\right)$ avec $k \in \{0;1;2\}$

$$Z_0 = 4cis\left(-\frac{5\pi}{18}\right)$$

$$Z_1 = 4cis\left(\frac{7\pi}{18}\right)$$

$$Z_2 = 4cis\left(\frac{19\pi}{18}\right) = 4cis\left(-\frac{17\pi}{18}\right)$$

$$
\begin{aligned}
Z_0 \cdot Z_1 \cdot Z_2 &= 4cis\left(-\frac{5\pi}{18}\right) \cdot 4cis\left(\frac{7\pi}{18}\right) \cdot 4cis\left(-\frac{17\pi}{18}\right) \\
&= 64cis\left(-\frac{5\pi}{18} + \frac{7\pi}{18} - \frac{17\pi}{18}\right) \\
&= 64cis\left(-\frac{5\pi}{6}\right) \\
&= z_3
\end{aligned}
$$

4)

$$
\begin{aligned}
z_4 &= (z_1 - z_2)^2 \\
&= \left[-16\sqrt{3} + 16i - (-16\sqrt{3} - 48i)\right]^2 \\
&= (-16\sqrt{3} + 16i + 16\sqrt{3} + 48i)^2 \\
&= (64i)^2 \\
&= -4096 \in \mathbb{R}_-^*
\end{aligned}
$$

Question 3

1)

$$
\det A = \begin{vmatrix} 4 & m & -3 \\ 2 & m-2 & m \\ 2 & m+1 & -4 \end{vmatrix} \begin{matrix} 4 & m \\ 2 & m-2 \\ 2 & m+1 \end{matrix}
$$

$$
\begin{aligned}
&= -16m + 32 + 2m^2 - 6m - 6 + 6m - 12 - 4m^2 - 4\mathrm{m} + 8\mathrm{m} \\
&= -2m^2 - 12\mathrm{m} + 14 \\
&= -2(m^2 + 6\mathrm{m} - 7) \\
&= -2(m-1)(m+7)
\end{aligned}
$$

$\det A = 0 \Leftrightarrow m = 1 \vee m = -7$

Le système admet une solution unique si et seulement si $m \in \mathbb{R}\backslash\{-7;1\}$

2) Si $m = 1$, $\det A = 0$ et le système n'admet pas de solution unique.

$$
(s) \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + y - 3z = -7 \\ 2x - y + z = -1 \\ 2x + 2y - 4z = -6 \end{cases}
$$

$$
\underset{\substack{(1)\,/\,\underbrace{(1)}+(2) \\ (3)\,/\,2\cdot(2)+(3)}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 6x - 2z = -8 \\ 2x - y + z = -1 \\ 6x - 2z = -8 \end{cases}
$$

$$
\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + z = -1 \\ 3x - z = -4 \end{cases}
$$

Le système est simplement indéterminé.

Posons $x = \alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

De (2) : $z = 3\alpha + 4$.

Dans (1) : $y = 2\alpha + 3\alpha + 4 + 1 \Leftrightarrow y = 5\alpha + 5$.

$S = \{(\alpha;5\alpha+5;3\alpha+4)/\alpha \in \mathbb{R}\}$

Interprétation géométrique: Les équations du système sont celles de trois plans se coupant suivant une droite passant par le point $P(0;5;4)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\5\\3\end{pmatrix}$.

Question 4

1) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\1\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-5\\-4\\-3\end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{AC}=k\cdot\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow\begin{cases}-5=k\cdot 4\\-4=k\cdot 1\\-3=k\cdot(-2)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}k=-\dfrac{5}{4}\\k=-4\\k=\dfrac{3}{2}\end{cases}\quad\text{impossible}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires ; les points A, B et C ne sont pas alignés.

$$M(x\,;y\,;z)\in\pi\Leftrightarrow det\left(\overrightarrow{AM}\,;\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\begin{vmatrix}x+1 & 4 & -5\\y-2 & 1 & -4\\z+2 & -2 & -3\end{vmatrix}\begin{matrix}x+1 & 4\\y-2 & 1\\z+2 & -2\end{matrix}=0$$

$$\Leftrightarrow -3(x+1)-16(z+2)+10(y-2)$$

$$+5(z+2)-8(x+1)+12(y-2)=0$$

$$\Leftrightarrow -11(x+1)+22(y-2)-11(z+2)=0$$

$$\Leftrightarrow(x+1)-2(y-2)+(z+2)=0$$

$$\Leftrightarrow x-2y+z+7=0$$

$\pi\equiv x-2y+z+7=0$

2) $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à π, donc un vecteur directeur de *d*.

Un système d'équations paramétriques de *d* est donc :

$$\begin{cases}x=\alpha-1\\y=-2\alpha+2\\z=\alpha-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=(z+2)-1\\y=-2\cdot(z+2)+2\\\alpha=z+2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=z+1\\y=-2z-2\\\alpha=z+2\end{cases}$$

Un système d'équations cartésiennes de *d* est donc :

$$d\equiv\begin{cases}x-z & = & 1\\y+2z & = & -2\end{cases}$$

3) Les plans π et π' sont parallèles, donc $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$ est aussi un vecteur normal à π'.

$$M(x\,;y\,;z)\in\pi'\Leftrightarrow\overrightarrow{DM}\perp\vec{n}$$

$$\Leftrightarrow\overrightarrow{DM}\cdot\vec{n}=0$$

$$\Leftrightarrow(x+2)\cdot 1+(y+1)\cdot(-2)+(z-3)\cdot 1=0$$

$$\Leftrightarrow x-2y+z-3=0$$

$\pi'\equiv x-2y+z-3=0$

4)

$$M(x\,;y\,;z) \in d \cap \pi' \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha - 1 \\ y = -2\alpha + 2 \\ z = \alpha - 2 \\ x - 2y + z - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha - 1 \\ y = -2\alpha + 2 \\ z = \alpha - 2 \\ \alpha - 1 + 4\alpha - 4 + \alpha - 2 - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha - 1 \\ y = -2\alpha + 2 \\ z = \alpha - 2 \\ 6\alpha = 10 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2}{3} \\ y = -\dfrac{4}{3} \\ z = -\dfrac{1}{3} \\ \alpha = \dfrac{5}{3} \end{cases}$$

d perce le plan π' au point $I\left(\frac{2}{3}\,;-\frac{4}{3}\,;-\frac{1}{3}\right)$.

Question 5

1) L'ordre n'importe pas.

a) Nombre de tirages possibles :

$$\underbrace{C_{50}^{5}}_{\substack{\text{Nombre de choix}\\ \text{de 5 boules}\\ \text{parmi 50}}} \cdot \underbrace{C_{12}^{2}}_{\substack{\text{Nombre de choix}\\ \text{de deux étoiles}\\ \text{parmi 12}}} = 139.838.160$$

b) Nombre de tirages comprenant les numéros 20 et 21 et l'étoile 4 :

$$\underbrace{C_{48}^{3}}_{\substack{\text{Nombre de choix}\\ \text{de 3 autres boules}\\ \text{parmi 48}}} \cdot \underbrace{C_{11}^{1}}_{\substack{\text{Nombre de choix}\\ \text{d'une autre étoile}\\ \text{parmi 11}}} = 190.256$$

c) Nombre de tirages où tous les nombres tirés sont pairs :

$$\underbrace{C_{25}^{5}}_{\substack{\text{Nombre de choix}\\ \text{de 5 boules (paires)}\\ \text{parmi 25}}} \cdot \underbrace{C_{6}^{2}}_{\substack{\text{Nombre de choix}\\ \text{de 2 étoiles (paires)}\\ \text{parmi 6}}} = 796.950$$

2) L'ordre importe, sans remise.

Nombre de cas possibles : il y a $A_{10}^{4} = 5.040$ tirages possibles.

a) Il y a

$$A_7^4 = 840$$

tirages de 4 boules jaunes possibles.

$$P(\text{"4 boules jaunes"}) = \frac{840}{5040} = \frac{1}{6} \approx 16{,}67\%$$

b) Il y a

$$\underbrace{C_4^2}_{\substack{\text{Nombre de}\\\text{places pour}\\\text{les boules jaunes}}} \cdot \underbrace{A_7^2}_{\substack{\text{Nombre de tirages}\\\text{pour 2 boules}\\\text{jaunes}}} \cdot \underbrace{A_3^2}_{\substack{\text{Nombre de tirages}\\\text{pour 2 boules}\\\text{vertes}}} = 1.512$$

tirages possibles.

$$P(\text{"2 boules jaunes et 2 boules vertes"}) = \frac{1512}{5040} = \frac{3}{10} = 30{,}00\%$$

c) Tirer au moins 3 boules jaunes signifie tirer 3 boules jaunes et 1 boule verte ou bien tirer 4 boules jaunes.
Il y a

$$\underbrace{C_4^3}_{\substack{\text{Nombre de}\\\text{places pour}\\\text{3 boules jaunes}}} \cdot \underbrace{A_7^3}_{\substack{\text{Nombre de tirages}\\\text{pour 3 boules}\\\text{jaunes}}} \cdot \underbrace{A_3^1}_{\substack{\text{Nombre de tirages}\\\text{pour 1 boule}\\\text{verte}}} + \underbrace{A_7^4}_{\substack{\text{Nombre de tirages}\\\text{pour 4 boules}\\\text{jaunes}}} = 3.360$$

tirages possibles.

$$P(\text{"au moins 3 boules jaunes"}) = \frac{3360}{5040} = \frac{2}{3} \approx 66{,}67\%$$

Question 6

1) L'ordre importe, sans remise.
Il y a $A_{35}^3 = 39.270$ bureaux possibles.

2)

a) On choisit une femme vice-présidente : il y a 16 choix possibles.
Puis on choisit un président : il reste 34 choix possibles.
Et finalement, on choisit un trésorier : il reste 33 choix possibles.
Il y a : $16 \cdot 34 \cdot 33 = 17.952$ bureaux possibles où le poste de vice-président est occupé par une femme.

b) Il faut distinguer deux cas :
- Si le président est un homme : il y a : $19 \cdot 16 \cdot 33 = 10.032$ bureaux possibles.
- Si le président est une femme : il y a : $16 \cdot 19 \cdot 33 = 10.032$ bureaux possibles.

En tout, il y a : $2 \cdot 10.032 = 20.064$ bureaux possibles où le président et le vice-président sont de sexes différents.

c) Il faut distinguer trois cas :
- Si Madame Dupuis est vice-présidente, Monsieur Dupond ne sera ni président, ni trésorier. Il y a : $18 \cdot 1 \cdot 32 = 576$ bureaux possibles.
- Si Madame Dupuis est trésorière, Monsieur Dupond ne sera pas président. Il y a : $18 \cdot 15 \cdot 1 = 270$ bureaux possibles.
- Si Madame Dupuis ne fait pas partie du bureau, il y a : $19 \cdot 15 \cdot 32 = 9.120$ bureaux possibles.

En tout, il y a : $576 + 270 + 9120 = 9.966$ bureaux possibles où le président est un homme, le vice-président est une femme et où Monsieur Dupond et Madame Dupuis ne font pas partie du bureau ensembles.