LE GOUVERNEMENT
DU GRAND-DUCHÉ DE LUXEMBOURG
Ministère de l'Éducation nationale,
de l'Enfance et de la Jeunesse

EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES CLASSIQUES
2021
CORRIGÉ – BARÈME

BRANCHE	SECTION(S)	ÉPREUVE ÉCRITE	
Mathématiques I	**D**	*Durée de l'épreuve :*	*1 h 45 min*
		Date de l'épreuve :	*22/09/2021*

Exercice 1 (13 points)

Schéma de Horner :

	1	$-7+2i$	$12+6i$	$-16-38i$
$5-3i$		$5-3i$	$-13+i$	$16+38i$
	1	$-2-i$	$-1+7i$	0

Donc : $P(5-3i)=0$, c.-à-d. $5-3i$ est une racine de P.

$P(z)=(z-5+3i)\cdot Q(z)$, avec $Q(z)=z^2+(-2-i)z+(-1+7i)$

Racines de Q : $\Delta=(-2-i)^2-4(-1+7i)=4+4i-1+4-28i=7-24i$

Posons $\delta=x+iy$, avec $x,y\in\mathbb{R}$

$$\delta^2=\Delta\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-y^2=7 & (1)\\ 2xy=-24 & (x,y \text{ ont des signes contraires})\\ x^2+y^2=\sqrt{7^2+24^2}=25 & (2)\end{cases}$$

$\frac{(2)+(1)}{2}$: $x^2=16\Leftrightarrow x=\pm4$ $\qquad$ $\frac{(2)-(1)}{2}$: $y^2=9\Leftrightarrow y=\pm3$

Donc : $\delta=4-3i \ \vee\ \delta=-4+3i$,

c.-à-d. $z_1=\dfrac{2+i+4-3i}{2}=3-i$ et $z_2=\dfrac{2+i-4+3i}{2}=-1+2i$

Factorisation de P : $\boxed{P(z)=(z-5+3i)(z-3+i)(z+1-2i)}$

Exercice 2 (8 + 7 = 15 points)

a. $z_1=-12-12i=12\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=12\sqrt{2}\ \text{cis}\left(\frac{5\pi}{4}\right)$

$z_2=-\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{3\sqrt{2}}{2}i=\sqrt{6}\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\sqrt{6}\ \text{cis}\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

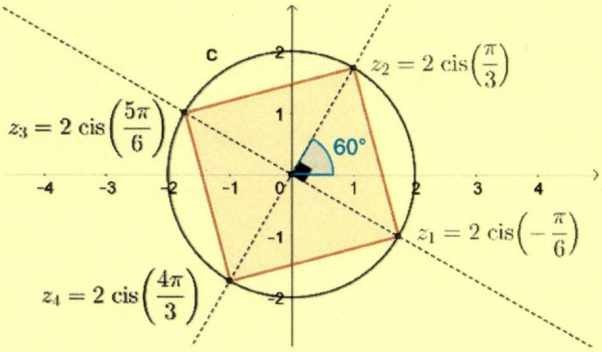
$$Z=\frac{2z_1^2}{iz_2^4}=\frac{2\cdot288\ \text{cis}\left(2\cdot\frac{5\pi}{4}\right)}{\text{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot36\ \text{cis}\left(4\cdot\frac{2\pi}{3}\right)}=16\ \text{cis}\left(\frac{5\pi}{2}-\frac{\pi}{2}-\frac{8\pi}{3}\right)=\underbrace{16\ \text{cis}\left(-\frac{2\pi}{3}\right)}_{\text{forme trigonométrique}}$$

$$Z=16\ \text{cis}\left(-\frac{2\pi}{3}\right)=16\ \text{cis}\left(\frac{4\pi}{3}\right)=16\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)=16\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\underbrace{-8-8\sqrt{3}i}_{\text{forme algébrique}}$$

b. $z^4=Z\Leftrightarrow z=\sqrt[4]{16}\ \text{cis}\left(-\frac{\pi}{6}+k\frac{2\pi}{4}\right)=2\ \text{cis}\left(-\frac{\pi}{6}+k\frac{\pi}{2}\right)$, $k\in\{0;1;2;3\}$

$$\boxed{S=\left\{2\ \text{cis}\left(-\frac{\pi}{6}\right),\ 2\ \text{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right),\ 2\ \text{cis}\left(\frac{5\pi}{6}\right),\ 2\ \text{cis}\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right\}}$$

Représentation graphique :



Exercice 3 (4 + 9 = 13 points)

a. $D = \begin{vmatrix} 6 & 5m+4 & 3 \\ 1 & -5m & 0 \\ -m-8 & 6 & -3 \end{vmatrix} = 90m + 18 - 15m^2 - 120m + 15m + 12$

$= -15\left(m^2 + m - 2\right) = -15(m-1)(m+2)$

$D = 0 \Leftrightarrow m = -2 \ \vee \ m = 1$

Conclusion : Σ_m admet exactement une solution pour tout $m \in \mathbb{R} \setminus \{-2; 1\}$.

b. $\Sigma_{-2} \equiv \begin{cases} 6x - 6y + 3z = 6 & (1) \\ x + 10y = 1 & (2) \\ -6x + 6y - 3z = -9 & (3) \end{cases}$

Les équations (1) et (3) sont incompatibles, donc $\boxed{S = \varnothing}$

Géométriquement, il s'agit de trois plans de l'espace dont l'intersection est vide.

$\Sigma_1 \equiv \begin{cases} 6x + 9y + 3z = 6 & (1) \\ x - 5y = 1 & (2) \\ -9x + 6y - 3z = -9 & (3) \end{cases} \overset{L_3 \leftarrow \frac{L_1 + L_3}{-3}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 6x + 9y + 3z = 6 \\ x - 5y = 1 \\ x - 5y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + 5k \\ y = k, \quad k \in \mathbb{R} \\ z = -13k \end{cases}$

$\boxed{S = \{(1+5k\,;\ k\,;\ -13k)\,;\, k \in \mathbb{R}\}}$

Géométriquement, il s'agit de trois plans de l'espace qui se coupent le long d'une droite commune passant par $A(1; 0; 0)$ et de vecteur directeur $\vec{v}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -13 \end{pmatrix}$.

$\Sigma_2 \equiv \begin{cases} 6x + 14y + 3z = 6 & (1) \\ x - 10y = 1 & (2) \\ -10x + 6y - 3z = -9 & (3) \end{cases} \overset{L_3 \leftarrow L_1 + L_3}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 6x + 14y + 3z = 6 \\ x - 10y = 1 \\ -4x + 20y = -3 \end{cases}$

$\overset{L_3 \leftarrow 2L_2 + L_3}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 6x + 14y + 3z = 6 \\ x - 10y = 1 \\ -2x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -\frac{1}{20} \\ z = \frac{37}{30} \end{cases}$

$\boxed{S = \left\{\left(\tfrac{1}{2}; -\tfrac{1}{20}; \tfrac{37}{30}\right)\right\}}$

Géométriquement, il s'agit de trois plans de l'espace dont l'intersection est le point $I\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{20}; \frac{37}{30}\right)$.

Exercice 4 (2 + 1 + 4 + 3 + 3 + 3 + 3 = 19 points)

a. $\boxed{(Oy) \equiv \begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases}}$

b. $A(-1;2;5) \notin d$, car le système $\begin{cases} -1=-3-\lambda \\ 2=4+\lambda \\ 5=-5-2\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda=2 \\ \lambda=-2 \\ \lambda=-5 \end{cases}$ n'admet pas de solution.

c. d passe par $B(-3;4;-5)$ et admet le vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Vecteurs directeurs du plan π : $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -10 \end{pmatrix}$, colinéaire à $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$

Représentation paramétrique du plan π : $\boxed{\pi \equiv \begin{cases} x=-3-\alpha+\beta \\ y=4+\alpha-\beta \\ z=-5-2\alpha+5\beta \end{cases}, \ \alpha,\beta \in \mathbb{R}}$

d. $d \perp \pi'$, donc $\vec{u}$ est un vecteur normal de π'.

$M(x;y;z) \in \pi' \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x+1 \\ y-2 \\ z-5 \end{pmatrix} \cdot \vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \boxed{\pi' \equiv x-y+2z=7}$

e. $\begin{cases} x=-3-\lambda & (1) \\ y=4+\lambda & (2) \\ z=-5-2\lambda & (3) \\ x-y+2z=7 & (4) \end{cases}$ (1), (2), (3) $\to$ (4) : $-3-\lambda-4-\lambda-10-4\lambda=7 \Leftrightarrow -6\lambda=24$
$\Leftrightarrow \lambda=-4$.

En remplaçant dans (1), (2) et (3), on obtient : $\begin{cases} x=-3+4=1 \\ y=4-4=0 \\ z=-5+8=3 \end{cases}$

Point de percé : $\boxed{I(1;0;3)}$.

f. Représentation paramétrique de d' : $d' \equiv \begin{cases} x+y=1 \\ 2y+z=3 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{d' \equiv \begin{cases} x=1-k \\ y=k \\ z=3-2k \end{cases}, \ k \in \mathbb{R}}$

g. d' passe par $C(1;0;3)$ et admet le vecteur directeur $\vec{w}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \vec{u}$, c.-à-d. d et d' sont parallèles.

En plus, $C \in d$, car $\begin{cases} 1=-3-(-4) \\ 0=4+(-4) \\ 3=-5-2(-4) \end{cases}$ et on conclut que : $\boxed{d=d'}$.