LE GOUVERNEMENT
DU GRAND-DUCHÉ DE LUXEMBOURG
Ministère de l'Éducation nationale,
de l'Enfance et de la Jeunesse

EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES CLASSIQUES
2021

BRANCHE	SECTION(S)	ÉPREUVE ÉCRITE
Mathématiques I	**D**	*Durée de l'épreuve :* *1 h 45 min* *Date de l'épreuve :* *22/09/2021*

Exercice 1 (13 points)

On donne dans $\mathbb{C}$ le polynôme *P* défini par : $P(z)=z^3-(7-2i)z^2+6(2+i)z-(16+38i)$.

Montrer que $5-3i$ est une racine du polynôme *P*, puis factoriser complètement $P(z)$ dans $\mathbb{C}$.

Exercice 2 (8 + 7 = 15 points)

a. On donne les nombres complexes : $z_1=-12-12i$, $z_2=-\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{3\sqrt{2}}{2}i$ et $Z=\frac{2z_1^2}{i\,z_2^4}$.

Déterminer les formes trigonométrique et algébrique de *Z*.

b. Résoudre l'équation $z^4=-8-8\sqrt{3}i$ dans $\mathbb{C}$. Noter les solutions sous forme trigonométrique et porter dans le plan de Gauß (unité : 1 cm) les points dont les affixes sont les solutions trouvées.

Exercice 3 (4 + 9 = 13 points)

On donne le système $\Sigma_m \equiv \begin{cases} 6x + (5m+4)y + 3z = 6 \\ x - 5my = 1 \\ -(m+8)x + 6y - 3z = -9 \end{cases}$, avec $m\in\mathbb{R}$.

a. Déterminer les valeurs de *m* pour lesquelles Σ_m admet exactement une solution.

b. Résoudre le système Σ_m pour chacune des valeurs suivantes de *m* : $m=-2$, $m=1$ et $m=2$. Donner à chaque fois une interprétation géométrique.

Exercice 4 (2 + 1 + 4 + 3 + 3 + 3 + 3 = 19 points)

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on donne le point $A(-1;2;5)$ et les droites

$$d\equiv\begin{cases} x=-3-\lambda \\ y=4+\lambda \\ z=-5-2\lambda \end{cases} \quad \text{et} \quad d'\equiv\begin{cases} x+y=1 \\ 2y+z=3 \end{cases}.$$

a. Donner un système d'équations cartésiennes de l'axe des ordonnées.

b. Montrer que *A* n'appartient pas à la droite *d*.

c. Déterminer une représentation paramétrique du plan π contenant le point *A* et la droite *d*.

d. Déterminer une équation cartésienne du plan π' passant par *A* et perpendiculaire à la droite *d*.

e. Déterminer le point de percée *I* de la droite *d* dans le plan $\pi'\equiv x-y+2z=7$.

f. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d'.

g. Démontrer que les droites *d* et d' sont confondues.

Formules trigonométriques

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\cos^2 x = \dfrac{1}{1+\tan^2 x}$ $\quad$ $\sin^2 x = \dfrac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$ $\quad$ $1+\tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

$\sin(\pi - x) = \sin x$ $\quad$ $\sin(\pi + x) = -\sin x$ $\quad$ $\sin(-x) = -\sin x$

$\cos(\pi - x) = -\cos x$ $\quad$ $\cos(\pi + x) = -\cos x$ $\quad$ $\cos(-x) = \cos x$

$\tan(\pi - x) = -\tan x$ $\quad$ $\tan(\pi + x) = \tan x$ $\quad$ $\tan(-x) = -\tan x$

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$ $\quad$ $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$ $\quad$ $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$

$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x$ $\quad$ $\tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\cot x$

$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$

$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$

$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$

$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$

$\tan(x+y) = \dfrac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$

$\tan(x-y) = \dfrac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$

$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ $\quad$ $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ $\quad$ $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$

$\sin 2x = \dfrac{2\tan x}{1+\tan^2 x}$ $\quad$ $\cos 2x = \dfrac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$ $\quad$ $\tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$

$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$ $\quad$ $\cos 3x = -3\cos x + 4\cos^3 x$

$\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$

$\sin p - \sin q = 2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}$

$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$

$\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$

$\tan p + \tan q = \dfrac{\sin(p+q)}{\cos p \cos q}$

$\tan p - \tan q = \dfrac{\sin(p-q)}{\cos p \cos q}$

$\sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$

$\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$

$\sin x \sin y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]$