LE GOUVERNEMENT
DU GRAND-DUCHÉ DE LUXEMBOURG
Ministère de l'Éducation nationale,
de l'Enfance et de la Jeunesse

EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES CLASSIQUES

2021

CORRIGÉ – BARÈME

BRANCHE	SECTION(S)	ÉPREUVE ÉCRITE	
Mathématiques	E, F, G	*Durée de l'épreuve :*	*2 heures*
		Date de l'épreuve :	*20/09/21*

Partie I : Systèmes d'équations et d'inéquations (20 points)

Question 1 (8 points) :

Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{x-2z}{3} - \frac{4-9y}{12} = y - \frac{4z-x+3}{4} \\ 1{,}5 - 0{,}5x - 0{,}1y + 0{,}8z = 0{,}6 - 0{,}8x \\ -2\cdot(y+6z) - (x-2y)\cdot 5 = 7 - (x-10) + 2z \end{cases}$$

Solution :

$$\begin{cases} \frac{x-2z}{3} - \frac{4-9y}{12} = y - \frac{4z-x+3}{4} & |\cdot 12 \\ 1{,}5 - 0{,}5x - 0{,}1y + 0{,}8z = 0{,}6 - 0{,}8x & |\cdot 10 \\ -2\cdot(y+6z) - (x-2y)\cdot 5 = 7 - (x-10) + 2z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4\cdot(x-2z) - (4-9y) = 12y - 3\cdot(4z-x+3) \\ 15 - 5x - y + 8z = 6 - 8x \\ -2y - 12z - 5x + 10y = 7 - x + 10 + 2z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 8z - 4 + 9y = 12y - 12z + 3x - 9 \\ 3x - y + 8z = -9 \\ -4x + 8y - 14z = 17 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 3y + 4z = -5 \\ 3x - y + 8z = -9 \\ -4x + 8y - 14z = 17 \end{cases}$$

$L_{2'} \leftarrow L_2 - 3L_1$ et $L_{3'} \leftarrow L_3 + 4L_1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 3y + 4z = -5 \\ 8y - 4z = 6 \\ -4y + 2z = -3 \end{cases}$$

$L_{3''} \leftarrow 2L_{3'} + L_{2'}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 3y + 4z = -5 & (1) \\ 8y - 4z = 6 & (2) \\ 0z = 0 & (3) \end{cases}$$

Le système est simplement indéterminé. Posons $z = k$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Dans (2) :

$$8y - 4k = 6$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{2}k + \frac{3}{4}$$

Dans (1) :

$$x - 3 \cdot \left(\frac{1}{2}k + \frac{3}{4}\right) + 4k = -5$$

$$\Leftrightarrow x - \frac{3}{2}k - \frac{9}{4} + 4k = -5$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{5}{2}k - \frac{11}{4}$$

<u>D'où :</u> $\mathcal{S} = \left\{\left(-\frac{5}{2}k - \frac{11}{4}\,;\, \frac{1}{2}k + \frac{3}{4}\,; k\right) \mid k \in \mathbb{R}\right\}$

ou $\left\{\left(-5k + 1\,;\, k\,; 2k - \frac{3}{2}\right) \mid k \in \mathbb{R}\right\}$ ou $\left\{\left(k\,;\, -\frac{1}{5}k + \frac{1}{5}\,;\, \frac{-2}{5}k - \frac{11}{10}\right) \mid k \in \mathbb{R}\right\}$

<u>Question 2 (12 points)</u>

Pour répondre à l'envie des gens de voyager après de longs mois de confinement dus à une pandémie, une compagnie aérienne propose à ces clients deux nouvelles destinations, appelons-les A et B.

Un vol à destination de A dure 3 heures et a une capacité de 105 passagers à bords, alors que le temps de vol pour arriver à la destination B est de 120 minutes et sa capacité est de 315 passagers. Un vol jusqu'à la destination A rapporte à la compagnie un bénéfice de 3000 € et le bénéfice du vol desservant la destination B est de 4000 €.

Pour ne pas surcharger les aéroports, la compagnie ne peut pas dépasser un maximum de 90 vols et de 22050 passagers supplémentaires. De plus, pour respecter leur disponibilité, les pilotes peuvent consacrer tout au plus 240 heures à ces deux nouvelles destinations.

Combien de vols vers chaque destination la compagnie doit-elle organiser pour que son bénéfice puisse être au maximum ? Et que vaut alors ce bénéfice maximal ?

<u>Solution :</u>

Soient x : nombre de vols destination A

y : nombre de vols destination B

Il faut résoudre graphiquement le système d'inéquations suivant :

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 90 \\ 3x + 2y \leq 240 \\ 105x + 315y \leq 22050 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y - 90 \leq 0 \\ 3x + 2y - 240 \leq 0 \\ 105x + 315y - 22050 \leq 0 \end{cases}$$

Bords :

$(d_1) \equiv x = 0$ $\qquad$ $(d_2) \equiv y = 0$

$(d_3) \equiv x + y - 90 = 0 \Leftrightarrow (d_3) \equiv y = -x + 90$

Point test : $O(0;0) \notin (d_3)$

On a : $0 + 0 - 90 = -90 < 0$ $\qquad$ donc O appartient au demi-plan.

$(d_4) \equiv 3x + 2y - 240 = 0 \Leftrightarrow (d_4) \equiv y = -\frac{3}{2}x + 120$

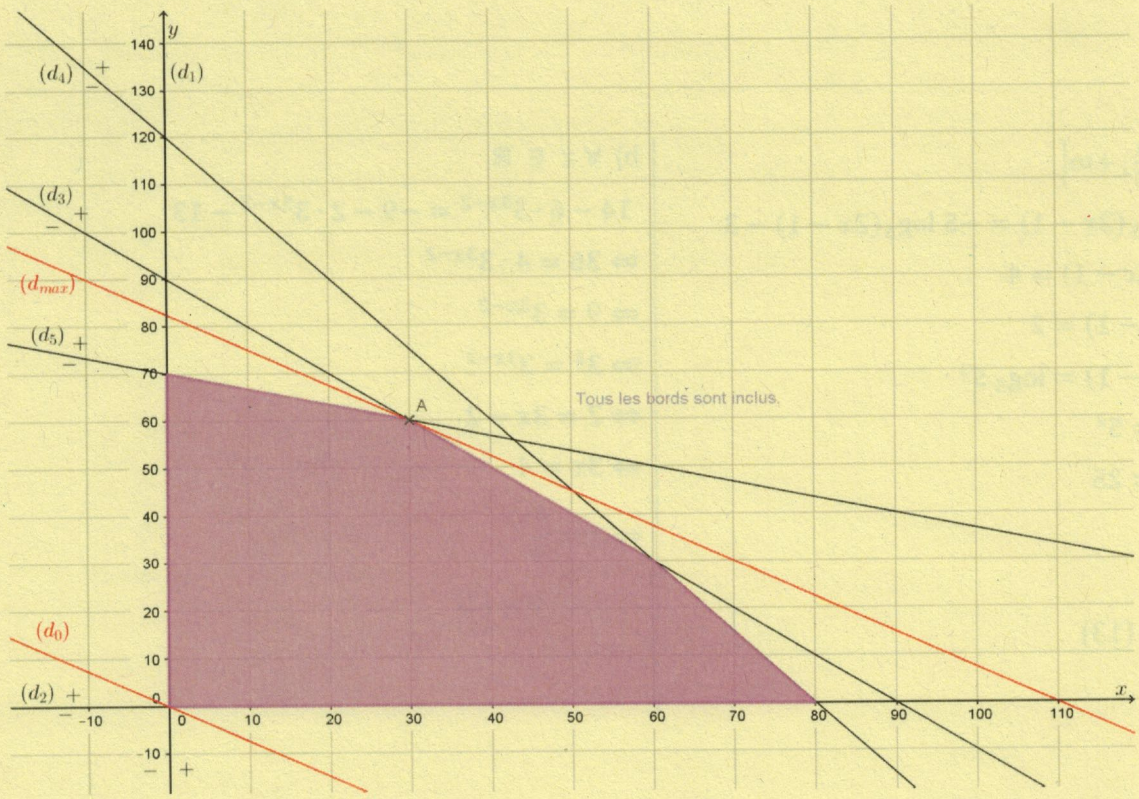
Point test : $O(0;0) \notin (d_4)$

On a : $3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 - 240 = -240 < 0$ $\qquad$ donc O appartient au demi-plan.

$(d_5) \equiv 105x + 315y - 22050 = 0 \Leftrightarrow (d_5) \equiv x + 3y - 210 = 0 \Leftrightarrow (d_5) \equiv y = -\frac{1}{3}x + 70$

Point test : $O(0;0) \notin (d_5)$

On a : $105 \cdot 0 + 315 \cdot 0 - 22050 = -22050 < 0$ $\qquad$ donc O appartient au demi-plan.



Bénéfice : $B(x;y) = 3000x + 4000y$

Représentons la droite : $(d_0) \equiv 3000x + 4000y = 0 \Leftrightarrow (d_0) \equiv y = -\frac{3}{4}x$

La droite (d_{max}) parallèle à (d_0) qui a au moins un point commun avec le polygone des contraintes et qui est le plus éloigné de l'origine passe par le sommet A.

Donc, on voit que le bénéfice maximal est obtenu pour :

$$\begin{cases} 30 \text{ vols destination A} \\ 60 \text{ vols destination B} \end{cases}$$

Ce bénéfice maximal vaut alors :

$$B(30\,;60) = 3000 \cdot 30 + 4000 \cdot 60 = 330\,000 \text{ €}$$

Partie II : Analyse (30 points)

Question 3 (3 + 3 = 6 points)

a) Résoudre l'équation suivante sur $\left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$ et donner l'ensemble de solutions :

$$-7 - 3\log_5(2x-1) = -5\log_5(2x-1) - 3$$

b) Résoudre l'équation suivante sur $\mathbb{R}$ et donner l'ensemble de solutions :

$$14 - 6 \cdot 3^{3x-2} = -9 - 2 \cdot 3^{3x-2} - 13$$

Solution :

a) $\forall x \in \left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$

$-7 - 3\log_5(2x-1) = -5\log_5(2x-1) - 3$

$\Leftrightarrow 2\log_5(2x-1) = 4$

$\Leftrightarrow \log_5(2x-1) = 2$

$\Leftrightarrow \log_5(2x-1) = \log_5 5^2$

$\Leftrightarrow 2x - 1 = 5^2$

$\Leftrightarrow 2x - 1 = 25$

$\Leftrightarrow 2x = 26$

$\Leftrightarrow x = 13$

$S = \{13\}$

b) $\forall x \in \mathbb{R}$

$14 - 6 \cdot 3^{3x-2} = -9 - 2 \cdot 3^{3x-2} - 13$

$\Leftrightarrow 36 = 4 \cdot 3^{3x-2}$

$\Leftrightarrow 9 = 3^{3x-2}$

$\Leftrightarrow 3^2 = 3^{3x-2}$

$\Leftrightarrow 2 = 3x - 2$

$\Leftrightarrow 3x = 4$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{4}{3}$

$S = \left\{\frac{4}{3}\right\}$

Question 4 (5 + 4 + 2 + 2 =13 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{4}x^2 + 3x - 1$.

a) Calculer la dérivée de f, dresser le tableau de variation et déterminer les coordonnées des extrema éventuels.

b) Calculer la dérivée seconde de f, dresser le tableau de concavité et déterminer les coordonnées des points d'inflexion éventuels.

c) Déterminer une équation de la tangente (t) à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 4.

d) Représenter $\mathcal{C}_f$ et (t) dans un repère orthonormé d'unité 1 cm.

Solution :

$f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{4}x^2 + 3x - 1$

a) $f'(x) = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 3$

Racines de f' :

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 3 = 0$

$\Leftrightarrow -3x^2 + 3x + 6 = 0$

$\Leftrightarrow x = 2 \text{ ou } x = -1$

$\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4\cdot(-3)\cdot 6 = 81 > 0$

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3-9}{2\cdot(-3)} = 2$

$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3+9}{2\cdot(-3)} = -1$

Tableau de variation :

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\searrow$	min $-\frac{11}{4}$	$\nearrow$	4 max	$\searrow$	

Extrema :

- f admet un minimum en $x = -1$ qui vaut $f(-1) = -\frac{11}{4} = -2{,}75$
- f admet un maximum en $x = 2$ qui vaut $f(2) = 4$

b) $f''(x) = -3x + \frac{3}{2}$

Racine de f'' :

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -3x + \frac{3}{2} = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

Tableau de concavité :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	
$\mathcal{C}_f$			P.I.		

Point d'inflexion : La fonction f admet un point d'inflexion de coordonnées $\left(\frac{1}{2}\,;\,\frac{5}{8}\right)$.

c) L'équation réduite de la tangente au point d'abscisse 4 est donnée par :

$(t) \equiv y = f'(4)\cdot(x-4)+f(4)$

$\Leftrightarrow y = -15\cdot(x-4)-9$

$\Leftrightarrow y = -15x+60-9$

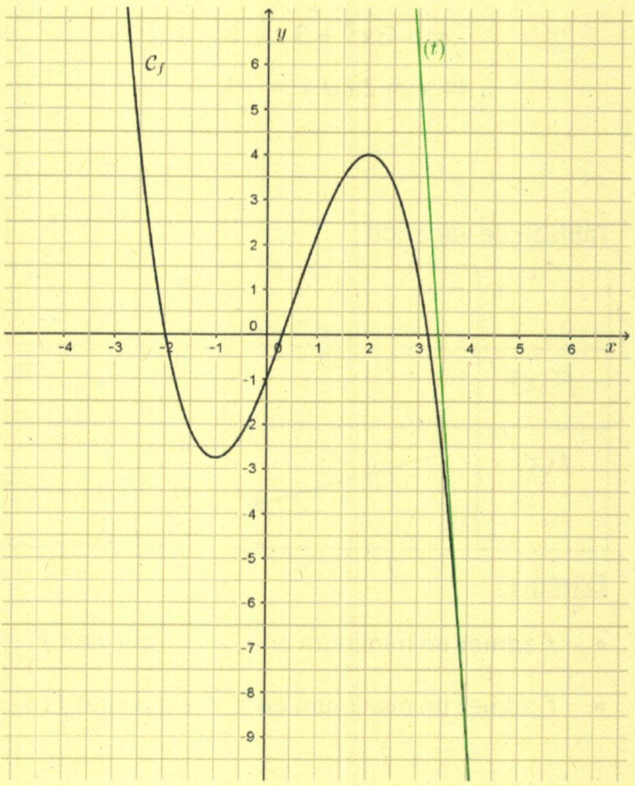
$\Leftrightarrow y = -15x+51$

D'où : $(t) \equiv y = -15x+51$

d) Tableau de valeurs pour (t) :

x	4	3
y	-9	6

Représentation graphique de f et de (t) :



Question 5 (5 points)

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{-4}{3-5x}$.

Calculer le nombre dérivé de f en 3 en utilisant la définition.

Solution :

1ère méthode :

On a :

$$\frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \frac{\frac{-4}{3-5(3+h)} - \frac{-4}{3-5\cdot 3}}{h}$$

$$= \frac{\frac{-4}{-12-5h} - \frac{-4}{-12}}{h}$$

$$= \frac{\frac{-4}{-12-5h} - \frac{1}{3}}{h}$$

$$= \frac{\frac{-4\cdot 3 - (-12-5h)}{3\cdot(-12-5h)}}{h}$$

$$= \frac{-12+12+5h}{h\cdot 3\cdot(-12-5h)}$$

$$= \frac{5h}{h\cdot 3\cdot(-12-5h)}$$

$$= \frac{5}{3\cdot(-12-5h)}$$

Pour $h = 0$:

$$f'(3) = \frac{5}{3\cdot(-12-0)} = -\frac{5}{36}$$

2e méthode :

On a :

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\frac{-4}{3-5(x+h)} - \frac{-4}{3-5x}}{h}$$

$$= \frac{\frac{-4}{3-5x-5h} + \frac{4}{3-5x}}{h}$$

$$= \frac{\frac{-4(3-5x)+4(3-5x-5h)}{(3-5x-5h)(3-5x)}}{h}$$

$$= \frac{-12+20x+12-20x-20h}{h\cdot(3-5x-5h)(3-5x)}$$

$$= \frac{-20h}{h\cdot(3-5x-5h)(3-5x)}$$

$$= \frac{-20}{(3-5x-5h)(3-5x)}$$

Pour $h = 0$:

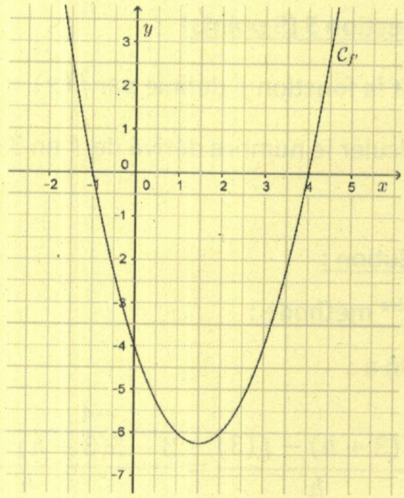
$$f'(x) = \frac{-20}{(3-5x)(3-5x)} = \frac{-20}{(3-5x)^2}$$

et donc

$$f'(3) = \frac{-20}{(3-5\cdot 3)^2} = \frac{-20}{(-12)^2} = -\frac{20}{144} = -\frac{5}{36}$$

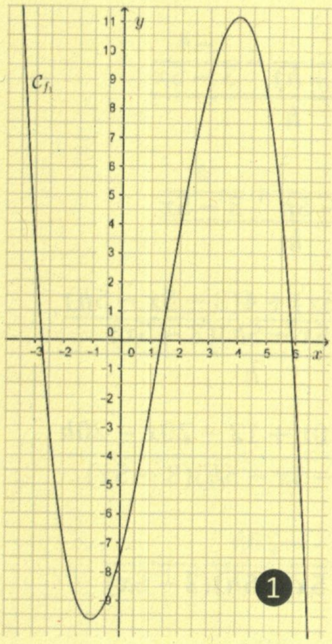
Question 6 (3 + 3 = 6 points)

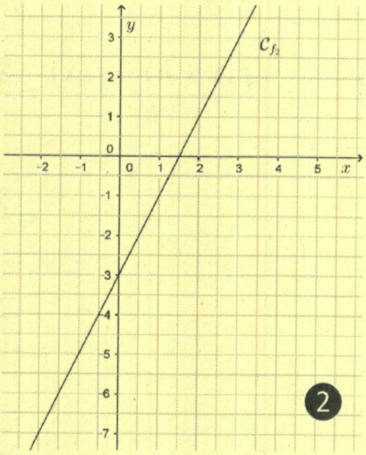
Voici la représentation graphique de la dérivée d'une fonction f.

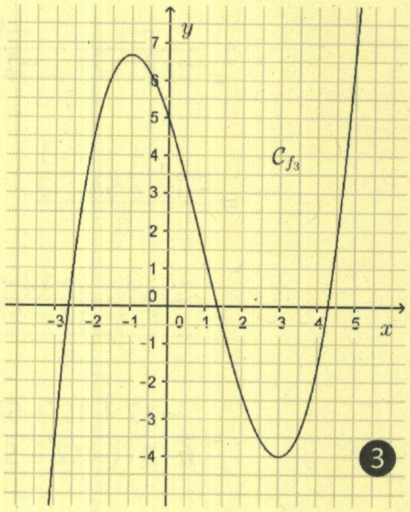


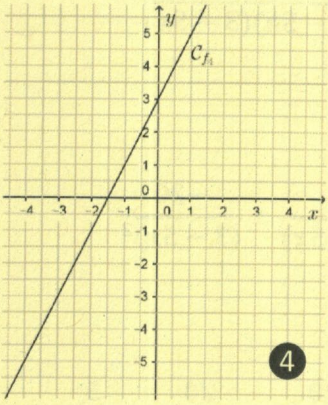
a) Parmi les huit courbes ci-dessous, retrouver la représentation graphique de la fonction f. Justifier la réponse.

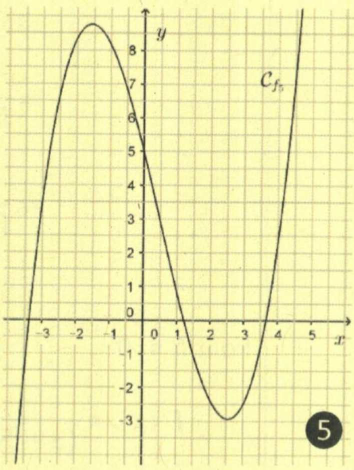
b) Parmi les huit courbes ci-dessous, retrouver la représentation graphique de la dérivée seconde f''. Justifier la réponse.

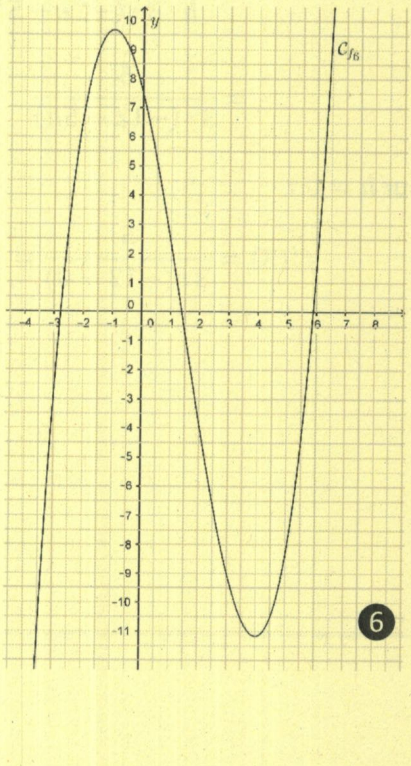


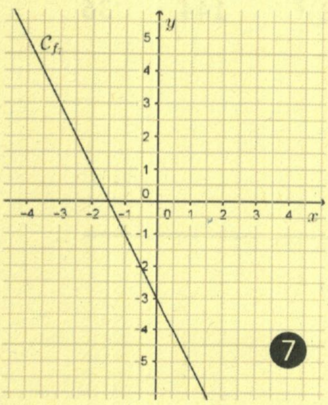


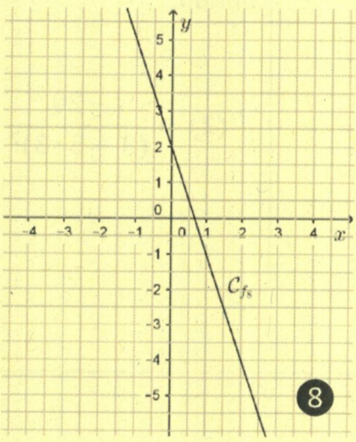












Solution :

a) Tableau de variation de f à l'aide du signe de f' (d'après $\mathcal{C}_{f'}$) :

x	$-\infty$		-1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$	

D'où : $\mathcal{C}_f = \mathcal{C}_{f_6}$

b) Tableau de signe de f'' à l'aide des variations de f' (d'après $\mathcal{C}_{f'}$) :

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$ (fonction)		$\searrow$	min	$\nearrow$	
$f''(x)$ (Dérivée)		$-$	0	$+$	

D'où : $\mathcal{C}_{f''} = \mathcal{C}_{f_2}$

Partie III : Probabilités et combinatoire (10 points)

Question 7 (4 + 2 + 2 + 2 = 10 points)

Lors de la pandémie, l'inspection sanitaire a détecté 900 personnes infectées (cas positifs) dans le milieu scolaire pendant une semaine en décembre. Une analyse montre que :

- 40 % des cas positifs ont été repérés au fondamental et parmi ces personnes infectées au fondamental, 12,5 % sont des enseignants.
- 2 % des cas positifs sont des élèves des centres de compétences. Dans ces centres, il y a deux fois plus d'élèves positifs que d'enseignants infectés.
- 19 % des cas positifs sont des enseignants.

a) Recopier et compléter le tableau.

On choisit au hasard une personne infectée.

b) Déterminer la probabilité que cette personne choisie vienne du lycée.

c) Déterminer la probabilité que cette personne choisie soit un élève sachant qu'il est au lycée.

d) Sachant que la personne choisie est un enseignant, déterminer la probabilité qu'elle donne des cours au fondamental.

Solution :

a)

	lycée	fondamental	Centre de compétences	Totaux
enseignants	117	45	9	171
élèves	396	315	18	729
Totaux	513	360	27	900

b) $p(lycée) = \frac{513}{900} = \frac{57}{100}$ $\quad (= 57\ \%)$

c) $p(élève \mid lycée) = \frac{396}{513} = \frac{44}{57}$ $\quad (\approx 77{,}2\ \%)$

d) $p(fondamental \mid enseignant) = \frac{45}{171} = \frac{5}{19}$ $\quad (\approx 26{,}3\ \%)$